Trends in Mathematics - New Series
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 11, Number 1, 2009, pages 87–101

재정학(finance) 에서 연속 시간 방법론의 발전에 관한 소고

수리과학과 최우진

재정학(finance)은 최근 30년 동안 급속도로 발전해왔다. 학문적으로나 실무적으로 엄청난 발전을 해 올 수 있었던 근본적인 이유는 경제 모델과 문제들에 연속시간 방법론(continuous time method)을 이용하면서부터라 해도 과언이 아니다. 연속시간을 이용하면 여러 경제적인 이론들을 이산시간(discrete time)에서 정의된 이론보다 실제에 가까운 모델을 표현할 수 있으며 금융 이론들이 실제 금융 산업에 활용되기 시작한 것도 연속시간 방법론의 발전에 따른 것이다. 이 글에서는 재정학(finance)에서 쓰이는 여러 연속시간 방법론들과 그들의 발전 그리고 응용 등을 소개하고자 한다. 옵션(option)과 다른 파생상품들의 가격결정(derivatives pricing), 동적 소비, 투자 문제(dynamic consumption and portfolio choice) 그리고 연속시간 모델들의 추정(estimation)에 대해 초점을 맞춰 이야기 할 것이며 이 밖에 이자율의 기간구조(term structure of interest rates), 자산 가격결정(asset pricing), 파산위험과 신용 차이(default risk and credit spreads), 실제 옵션 응용 (real option applications) 그리고 여러 자본 시장의 마찰(capital market frictions)들에 대한 이야기는 다음 기회에로 미루기로 하겠다.

1. 재정학에서의 연속시간 방법론에 관한 역사

재정학(finance) 에서 연속 시간 방법론이 사용되기 시작한 것은 그리 오래되지 않았다. 연속 시간 방법론의 기원은 1997년 노벨 경제학상을 받은 Merton의 1969년, 1971년 그리고 1973년 논문들에 있다고 할 수 있다. 1969년의 논문에서는 처음으로 연속 시간에서의 최적의 소비, 투자 문제(optimal consumption and portfolio selection problem)를 만들었으며 개인이 일정한 초기자산을 가지고 소비와 투자만을 통해 미래 자산 가치의 기대효용(Expected Utility)을 극대화하는데 목적을 두고, HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 방정식을 유도하여 해를 구하는 동

적 프로그래밍 방법(Dynamic Programming Method)을 처음으로 도입하였다. 또한 1971년 논문에서는 평형자산가격(equilibrium asset pricing)을 구하는 방법을 소개하였고 이는 앞으로의 다양한 가격 결정 이론들의 발전을 가져왔다. 1960년대 말부터 현재까지 Merton의 영향력 있는 논문들에 의해 연속시간 방법론은 금융 경제학(financial economics)에 빠질 수 없는 부분이 되었는데, 실제로 재정학에서 중요한 몇몇 부분에 있어서는 연속시간 방법론을 이용한 모델들을 이용하여 연구를 하거나 경제적인 직관(economic intuition)을 얻는 데 훨씬 도움이 되기도 한다.

연속시간에서 정의된 경제 모델들의 발전과 더불어 그 모델들을 검사하는 방법 또한 많은 발전을 해왔으며 여전히 여러가지 방법들이 개발되고 또는 실제로 산업에서 사용되고 있다. 경제 이론을 이용한 모델을 통해 해석적 해(analytic solution)을 구할 수 없는 경우에는 수치적인 해(numerical solution)를 찾을 수 있는데 정확하고 빠른 방법이 요구된다. 따라서 이런 부분에 대한 학문의 발전은 자연스러운 것이며 필요한 부분이라고 할 수 있겠다.

본격적인 이야기를 하기 전에 연속시간 방법론을 이용하여 여러 경제 이론을 설명한 책들을 소개 하고자 한다. 1969년에 시작된 연속 시간에서의 경제 이론은 1990년 근처에 몇몇 훌륭한 책들에 의해 정리되었다. 가장 훌륭한 책 중에 하나는 단연 Merton(1990) 이라 할 수 있겠다. 자신의 논문들을 비롯하여 연속시간 방법을 이용한 경제이론의 기본이 되는 내용들이 정리되어 있다. 또한 이 분야에 대해 여러 학자들이 자신들이 바라보는 관점과 자신들의 관심에 따라 쓰여진 책들이 여럿 있는데 대표적으로 Bhattacharya and Constantinides(1989), Harrison (1985), Malliaris(1982), Ingersoll(1987), Dothan(1990), Duffie(1988, 1996), 그리고 Karatzas and Shreve(1988, 1998)을 들 수 있다. 여기에는 구체적으로 어떻게 연속시간 방법을 이용하여 경제 이론을 설명하는지 잘 소개되어 있다. 또한 1990년대까지의 연속 방법론에 대한 정리도 잘 되어 있는데 이는 Bhattacharya(1989), Constantinides(1989), 그리고 Merton(1990)에 잘 나와있다.

1970년대는 연속시간 방법론을 이용한 경제 이론에 있어 가장 큰 획기적인 약진이 있었던 시기이다. 경제학을 공부하거나 또는 금융에 종사하는 사람이라면 누구나 알만한 옵션에 대한 가격결정에 과한 논문인 Black and Scholes(1973) 방정식이 발표된 시기이다. 이 논문과 함께 Merton(1973)은 그 전까지 존재하던 금융경제학의 새로운 지표를 열었으며 실제 금융기관에서 사용하는 사람들의 관점에서 문제를 바라보게 하였다. 그 전까지 파악하기 힘들었던 지분(equity)에 대한 옵션 가격 결정에 대해 처음으로 만족할만한 모델을 제시한 이 논문들은 회사의 여러 채무를 회사의 자산 값에 대한 조건부 청구권(contingent claim)과 관련하여 생각하였고 이 시작은 새로운 학문을 열게 하였다. 이름하여 ”contingent claim research” 라고도 불리기도 하며 이는 현재까지도 파생상품, 기업 재무, 그리고 파산위험 등에 대한 분야의 기반이 되고 있다. 또 하나의 다른 분야의 발전은 Merton(1969, 1971, 1973b)서부터 시작된 연속시간 사이에서의 자본가격결

정(intertemporal capital asset pricing, ICAPM)이라 할 수 있다. 이 분야의 중요한 부분은 투자자가 확률적인 변화에 대해 헷징 요구(hedging demand)를 가진다는 것이다. 이러한 헷징 요구는 경제 상황이 확률적으로 변한다 하더라도 연속 시간 사이에서 하나로 결정된다. 부분 평형 가격결정이론(partial equilibrium asset pricing theory)의 발전에 중요한 역할을 한 것은 Breeden(1979) 논문으로 Merton(1973b)에서 여러 베타(beta)들이 소비(consumption)에 의해 측정이 될 때 하나의 베타로 귀결된다는 것으로 보여주었다. 또한 이 기간 동안에는 이산 시간에서의 일반평형이론(general equilibrium theory)을 설명한 Lucas(1978) 논문이 발표 되었다. 이 일반평형 이론은 Cox, Ingersoll, and Ross(1985a)에 의해 연속시간에서의 일반평형이론으로 확장 되었는데 사실 이 논문은 1977년부터 알려졌다. 이 논문은 또 파산위험이 없는 자산의 기간 구조에 대한 일반평형 모델인 CIR(1985b)로 확장되었다. 마지막으로 1970년대에 있어 가장 큰 학문적 발전에 하나는 위험중립 가격결정(risk neutral asset pricing) 방법론에 대한 발견이다. Cox and Ross(1976a, 1976b)에 의해 처음 소개 된 위험중립 가격 결정 이론은 Harrison and Kerps(1979)에 의해 개념적인 정리가 이루어졌다. 마팅게일 이론(martingale representation theory)로 잘 알려져 있는 그들의 이론은 지금은 여러 금융 경제학 분야에서 가장 많이 쓰이는 방법 중에 하나가 되었다. 이렇듯 1970년대는 현재 재무학에 있어서는 없어서는 안되는 가장 중요한 시기였다. 1970년대가 재무학에서 연속시간 방법론의 문을 연 시기라면 1980년대 부터는 연속시간 방법의 눈부신 발전이 있어왔으며 현재에도 이어지고 있다. 대표적인 발전들 중 가장 먼저 최적의 동적 확률 제어 문제(dynamic stochastic optimal control problem)와 정적 상태공간에서의 표현 이론(static state space representation)이 완전 시장(complete market)에서는 동일 구조를 가지고 있다는 것을 들 수 있다. Cox and Huang(1989a)과 karatzas, Lehoczky, and Shreve(1987)에 잘 설명되어 있는 이 이론은 연속 시간 사이에서의 최적의 소비, 투자 문제에서 투자자가 여러 제한 조건이 있는 경우에 대해 적용이 가능하며 닫힌 해(closed solution)를 얻을 수 있는 장점이 있다. 그 다음으로는 여러 경험적인 사실들로부터 나온 시장에 존재하는 여러 마찰(friction)이 포함되어 있는 모델로 재 모델링(modeling) 되기도 하였다. 경험적 연구를 통해 얻은 결과들이 경제학적인 모델로 설명할 수 없는 경우를 발견하기 시작하였는데 이를 설명하기 위한 연구들은 여전히 숙제로 남아 있으며 여러 경제학자 들이 실제에 맞는 모델을 찾기 위해 현재에도 노력중이다. 이런 상황을 퍼즐(puzzle) 이라고 이야기 하는데 대표적으로는 equity premiun puzzle, volatlity smile, default free interest rate puzzle 등을 들 수 있겠다. 이 밖에도 많은 퍼즐이 존재 하지만 여기서 이야기 하고자 하는 범위를 벗어나기 때문에 퍼즐에 대한 설명은 생략하도록 하겠다. 이런 퍼즐들을 설명하기 위한 방법으로 나타난 것이 시장의 여러 마찰을 모델에 포함을 시키는 것이다. 시장의 마찰에는 세금, 거래 수수료, 제한적인 시장 참여, 불완전성, 정보의 비대칭등이 존재 하는데, 이는 Back(1992, 1993), Brenna and Xia(1999), Detemple(1986), He and Pearson(1991), Homstrom and Milgrom(1987)등에서 시작되었다. 이 밖에도 이론 뿐만 아니라 이론을 실제 금융 산업에 활용하기 위한 연구도 시작되었다. 시장에 존재하는 많은 데이터를 가지고 연속시간 방법으로 만든 이론을 이용하기 위해서는 필요한 변수들의 실제 시장값이 얼마가 되는지가 중요한 문제가 된다. 이를 연구하기 위한 움직임이 시작한 것도 1980년대로 Ho and Lee(1986)에서 시작되었다. 또한 연속시간 이론의 추정에 대한 연구도 활발히 진행되었고 여러 방법들이 발표되기 시작하였다. 이런 방법들은 현재 금융 산업에서 절대적으로 필요한 부분이 되었고 보다 좋은 방법을 찾기위한 노력은 여전히 진행 중이다.

2. 옵션 및 파생상품의 가격 결정

지금부터는 구체적으로 몇 분야에 대한 이야기를 하고자한다. 크게 현재 금융 산업의 기반이 된 옵션을 비롯한 파생상품의 가격결정, 여러 경제 이론의 기초가 되는 최적의 동적 소비, 투자 선택 문제, 그리고 금융 산업에서 활용되는 연속시간 모델들의 추정등 세가지 분야로 나누어 보았다.

옵션 및 파생상품의 가격결정의 이론은 black and Scholes(1973), Merton(1973b)로부터 시작되었다. 이들의 이론은 선도계약, 선물거래, 스왑, 이자율, 그리고 현물등, 서로 다른 기본 자산들에 적용되어 여러 파생상품들을 유도하였고 실제 시장에 그 결과들을 활용함으로써 금융시장의 확대에 큰 역할을 하게 되었다. 또한 현재까지도 많은 필요에 의해 새로운 파생상품들이 개발되고 그에 따른 가격결정 방법등, 많은 연구가 진행되고 있다. 더욱이 1990년대부터는 실제로 거래되고 있는 상품들에 대한 가격결정 이론과 빠르고 정확한 값을 구하기 위한 노력이 활발하게 진행되고있는데 이는 금융 경제학에 통계학이나 수학등의 기초학문이 보다 엄밀하고 복잡하게 적용되었기 때문이다. 금융 시장에 존재하는 퍼즐들을 해결하기 위한 움직임도 보이기 시작하는데 대표적인 예로는 volatility smile을 들 수 있겠다. 시장에 존재하는 데이터를 이용해서 Black-Scholes 모델에 적용해보면 시장 변수중 중요한 역할을 하는 변동성(volatility)은 시간에 따라 변하는 모양을 갖게 된다. 이는 처음 모델의 가정에 해당되는 상수값을 갖는 변동성에 모순이 되는 사실로 이를 해결하기 위해 변동성이 상수가 아니라 확률적 모형을 갖는 가정으로 발전하게 된다. 옵션 및 파생상품들에 대한 연구 결과는 이 분야를 전문으로 다루는 저널(journal)들을 이용하면 최근의 연구 동향과 중요한 이슈에 대해 알 수 있을 뿐만 아니라 보다 정확하고 엄밀한 모형들을 경험할 수 있다. 대표적인 저널들은 다음과 같다.

Journal of Derivatives,
Mathematical Finance,
Review of Derivatives Research,

Journal of Financial Engineering,
Finance and Stochastics,
Applied Mathematical Finance,
Journal of Computational Finance,
RISK magagine.

옵션의 가격결정의 기본 원리는 완전시장(complete market)안에서는 돈의 출입이 없이 동적인 포트폴리오 전략(self-financing strategy)을 통해 파생상품을 설명할 수 있다는 점에 있다. 다시 말해 기본자산과 은행을 가지고 연속적으로 포트폴리오를 재구성(portfolio rebalancing) 함으로써 콜옵션(call option) 등의 파생상품의 가격을 대신 할 수 있다(replicating portfolio)는 것이다. 이 원리가 바로 Black and Scholes(1973)와 Merton(1973b)에서 사용된 원리 이며 1976년 Cox and Ross의 논문이 나오기 전까지 옵션 및 파생상품의 가격결정의 근간이 되었다. Cox and Ross(1976a, 1976b)에서는 위험중립(risk neutral) 가격 결정을 처음으로 도입하였는데 이는 이론적으로 Harrison and Kerps(1979)에 의해 연속시간에서 이론으로 정리 되었다. 그들은 위험 중립 가격결정과 차익거래가 없는 가격결정과의 연관을 보였으며 차익거래가 없을 때 위험중립측도(risk neutral measure)가 하나만 존재한다는 것을 보여주었다. 위험중립 가격 결정은 현재에도 많이 쓰이는 방법 중에 하나로 기존의 모델에서는 편미분 방정식을 유도하여 풀게 되지만 이는 많은 계산적인 편의를 가지고 왔으며 또한 금융 산업에 활용하기에도 쉬운 방법을 제시하였다. 여기서 간단하게 위험중립 가격결정을 설명하고자 한다.

어떤 증권의 시간 t에서의 가격을 p_t라고 했을 때 시간 T에서의 X_T의 값을 갖는 임의의 조건부 청구권(contingent claim)의 가격은 다음과 같다

$$p_t = E^P[m_t(T)X_T]$$

이 때 m_t 는 가격 커널(pricing kernel)이며 $E^P[.]$ 는 시장에 주어진 원래의 측도(measure)에서의 기대값을 나타낸다. 평형가격에서 m_t는 한계대체율(marginal rate of substitute)에 해당되는 값이다. 만약에 순간 이자율을 r_s라고 한다면 위의 가격은 위험중립 측도를 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p_t = E^Q[e^{-\int_t^T r_s ds} X_T]$$

이 때 $E^Q[.]$ 는 위험중립측도에서의 기대값을 나타낸다. 위의 가격결정은 통화교환비율기준(numeraire)을 은행예금(money market account)으로 잡은 결과인데 다른 통화교환비율기준을 잡아 가격 결정을 할 수 있다. 이 때에는 Girsanov 정리에 의해 새로운 중립위험 측도가 존재하게 되며 여러 통화교환비율기준을 이용한 가격 결정 모델들이 있을 수 있다. 다른 통화교환비율기준이 될 수 있는 것에는 할인된 채권, 서로 다른 만기를 갖는 선도비율등이 있는데 이는 이자율 파

생상품의 가격 결정에 중요한 역할을 하게 된다. 리보 시장 모델(LIBOR market model)에서는 합성된 선도비율(compounded forward rate)을 새로운 통화교환비율기준으로 생각하는데 이 모델은 이자율 파생상품인 캡(cap), 스왑(swap), 그리고 스왑션(swaption)등의 기본이 되는 모델이다. 리보 시장 모델(LIBOR market model)을 이용하여 이자율 파생상품의 가격결정에 관한 내용은 Brace, Gatarek, and Musiela(1997)와 Miltersen, Sandmann, and Sondermann(1997), 그리고 Jamshidian(1989, 1991)에 이론적인 접근 방법과 증명들이 잘 나와있다. 2000년대에 와서 옵션의 가격 결정에서는 기본자산에 점프(jump)나 확률적으로 변하는 변수가 들어있는 모델에 관한 연구들이 많이 진행되어 왔다. 실제 주식이 움직이는 모습과 비슷한 모델을 찾아 가격 결정을 하는 것인데 이런 가정들은 가격 결정을 훨씬 어렵게 만들기도 한다. 대표적으로 Hull and White(1987)에서는 확률적으로 변하는 변동성(stochastic volatility)이 있을 때의 옵션 가격 결정을 계산적으로 연구하였고, Heston(1993)은 확률적으로 변하는 변동성이 있는 모델에 대해 닫힌 해(closed form solution)을 구하였다. 이 밖에도 점프와 확률적으로 변하는 변동성이 옵션 가격에 중요한 요소라는 것을 보여준 논문들도 여럿 있다.

옵션의 가격 결정과 함께 다른 파생상품의 가격결정에 관한 논문들도 많이 나오게 된다. 이는 주식시장 뿐만 아니라 선물, 선도 거래와 선물거래에 대한 옵션, 스왑 그리고 다른 이색옵션(exotic option)에 대한 시장 수요가 늘어나면서 자연스럽게 발전하게 되었다. 수백편이 넘는 논문들이 이 주제에 관해 쓰여졌으며 개념적인 이야기는 옵션의 가격결정과 크게 다르지 않다. 여러 파생상품에 관한 책으로는 다음을 들 수 있다;

Briys et al.(1998), Cox and Rubinstein(1985), Hull(1999), Dempster and Pliska(1997), Misiela and Rutkowski(1998).

이색옵션의 경우, 매 시간 기본 자산이 움직이는 것에 따라 최종 가격에 영향을 주는 경우가 많은데 이는 닫힌 해(closed form solution)를 찾기 어려워진다. 따라서 각 파생상품에 따른 수치적인 방법들도 개발이 되기도 하였다. 수치적 방법에 관한 대표적인 책을 소개 하도록 하겠다;

Kloedon and Platen(1992), Judd(1998), Clelow and Strickland (1998), Rogers and Talay(1997).

수치적인 방법으로는 가장 많이 활용되는 두 가지 방법을 들 수 있다. 유한차분 접근법(finite difference approximation)과 몬테 카를로 방법(Monte Carlo sinulation) 이 그 두가지 인데 Boyle, Broadie, and Glasserman(1997)과 Brennan and Schwarts(1978)에 두 방법에 관한 정리가 잘 되어있다. 유한차분 접근법은 편미분 방정식을 수치적으로 푸는 방법으로 시간을 잘게 나눠 매 시간에서의 값들을 모두 찾아 주는 방법이다. 시작하는 순서에 따라 explicit method와 implicit method로 크게 나뉜다. 몬테 카를로 방법은 위험중립 가격 결정을 했을 때 유용하게 쓰이는 방법으로 여러 번의 시행을 통해 얻은 평균값을 찾아주는 방법이다. 몬테 카를로

방법은 유한 차분법에 비해 시간이 오래 걸리는 단점이 있지만 대부분의 파생상품의 수치적 가격을 결정할 때 활용이 가능하다. 반면 유한 차분법은 시간이 적게 걸리는 장점이 있지만 선형 편미분 방정식에서만 활용이 가능하며 기본 자산이 여러 개가 있는 모형에 대해서는 적용이 불가능 하다는 단점을 가지고 있다. 따라서 최근에는 이러한 단점들을 보완하기 위한 방법들을 연구하고 있으며 혹은 새로운 방법을 개발하려는 연구도 많이 진행중이다.

옵션 및 파생상품 가격결정에서 마지막으로 이야기할 부분은 1990년대 후반부터 활발히 진행된 여러 제약 조건이 있는 경우의 가격 결정에 관한 연구이다. 대표적인 예가 Leland(1985)가 시작한 거래 수수료가 모델에 들어가는 경우를 들 수 있는데 이 부분의 많은 내용이 다음에 이야기할 최적의 소비, 투자 선택 문제와 겹치기 때문에 뒤에서 이야기 하도록 하겠다. 최근 10여년 동안 옵션 및 파생상품에 관한 연구에서는 보다 실제에 가까운 모델하고 상당히 복잡한 계산, 그리고 수치적인 해를 찾기위한 움직임을 보여왔다. 이는 학계에서 뿐만 아니라 금융 산업에서 먼저 필요한 부분으로 앞으로도 보다 실제에 가까운 모델에 대한 개발이나 정확하고 빠른 수치적 해법등에 관한 연구가 필요한 부분이다. 1980년이후 부터는 가격 결정에 있어서 개념적으로 획기적인 약진이 없었던 것이 사실이다. 다만 수치적인 방법, 또는 시장 변수들에 대한 측정 방법들이 주로 연구 되었는데 이번 금융위기를 통해 보다 정확한 모델과 가격 결정 방법들 그리고 수치적 해법들이 더욱 필요하다는 것을 알 수 있다.

3. 최적의 소비, 투자 선택 문제

최적의 소비, 투자 선택 문제는 일반 평형가격을 구하는 데에 있어 한 축을 담당하는 부분 평행이론과 관련된 분야로 연속시간에서의 방법론을 이용한 Merton(1969)의 논문 이래로 비약적인 발전을 해 오고 있다. 이 논문에서는 연속적인 시간에서 개인이 일정한 초기자산을 가지고 소비와 투자만을 통해 미래 자산 가치의 기대효용(Expected Utility)을 극대화하는데 목적을 두고, HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 방정식을 유도하여 푸는 동적 프로그래밍 방법(Dynamic Programming Method)을 도입하였다. Merton(1969)에서는 특정한 효용함수를 상용했었던 반면, Karatzas, Lehoczky, and Shreve (1986)에서 동적 프로그래밍 방법을 이용하여 일반 효용함수에 대한 해를 찾아줬다. Cox and Huang (1989)과 수학자인 Karatzas, Lehoczky, and Shreve (1987)는 서로 독립적으로 마팅게일 방법(Martingale Method)을 소개하였는데 마팅게일 방법은 마팅게일의 정의와 이원 함수(Dual Function)을 이용하여 최적화 문제를 해결하는 방법이다. 동적 프로그래밍 방법은 편미분 방정식(Partial Differential Equation)을 풀어야 하기 때문에 일반적으로 해석적해(Analytic Solution)을 구하기 어렵다. 따라서 이러한 경우, 주로 수치적해(Numerical Solution)을 구하는데 유한 차분법이 대표적인 방법이다. 반면에 마팅게일 방법은 라그랑지 방법(Lagrange multilplier)을 이용하여 이

원함수를 유도해 내는 방법으로 해의 존재성이나 유일성을 증명하는데 용이하다. 마팅게일 방법을 활용하면 보다 실제에 가까운 모델, 즉 여러 제약 조건이 있는 경우에 대해 문제를 풀어주기에 용이하다. 소비나 포트폴리오에 제약 조건이 있는 경우에 대하여 많은 연구가 진행되어 왔고, 현재에도 진행중이다. 포트 폴리오에 제약 조건이 있는 경우에는 일반적이 제약 조건에 대해 마팅게일 방법으로 해의 존재정과 해의 성질들을 설명하기도 하였는데 Karatzas and Cvitanic(1993)의 논문을 보면 잘 나와있다. 소비와 투자에 대한 제약 조건뿐만 아니라 거래 수수료(transaction cost)가 존재할 때나 세금(tax)을 내야할때, 그리고 보다 일반적인 효용함수인 귀납적 효용함수(stochastic differential utility)에 대한 연구는 최근에 연구되는 큰 이슈들 중에 하나라고 할 수 있다. 거래 수수료에 대한 이야기는 Jang et al. (2007)에 잘 나와 있으며 귀납적 효용함수는 Duffie and Epstein(1992)로부터 시작되었다. 여러 제약 조건들 뿐만 아니라 실제 투자자들에 대한 모델을 생각하기도 하였다. 투자자들이 일을 하고 돈을 벌며, 소비와 투자를 통한 경제활동을 펼치는 경우, 투자자의 은퇴시기는 중요한 이슈가 될 것이다. Bodie, Merton, and Samuelson (1992) 과 Bodie et al. (2004)은 고정된 은퇴 시간에 대하여 노동 수입이 있는 경우의 소비-투자 문제를 해결하였는데 실제로는 고정된 시기에 은퇴를 하는 경우가 있기도 하지만 투자자가 원하는 때에 은퇴하는 경우가 많아졌다. 따라서 투자자가 원할 때 은퇴를 할 수 있는 모델이 연구되었는데 이는 Karatzas and Wang (2000)에서 처음으로 마팅게일 방법을 이용하여 해결할 수 있었다. Choi and Koo (2005) 와 Jeanblanc, Lakner, and Kadam (2004)등의 논문에서 구체적인 예를 찾아볼 수가 있다. Choi and Shim (2006)에서 처음으로 노동 수입(labor income)이 있을 때 투자자가 원할 때 은퇴를하는 경우에 대한 문제를 해결하였다. 하지만 여기에 여러 제약 조건이 들어가게 되면 문제는 더욱 더 복잡하게 된다. 최저 생계유지비(Subsistence Consumption Constraint)와 Borrowing Constraint는 실제 경제활동을 하는 투자자에게 있어 중요한 제약 조건이라 할 수 있다. 최저 생계유지비는 살아가면서 생계에 필요한 최저의 금액으로 반드시 소비를 해야하는 양에 해당한다. 그리고 Borrowing Constraint는 미래에 받을 수 있는 자신의 수입을 현재에 쓸 수 없다는 조건으로 실제 많은 투자자들이 소득이 있음에도 불구하고 대출을 못 받는 경우가 많이 있다. Dybvig and Liu (2006)에서는 처음으로 Borrowing Constraints가 있는 경우에 최적의 은퇴결정 및 소비-투자 문제에 대해서 해결고 Sethi, Taksar, and Presman (1992)에서 최저 생계유지비와 파산의 위험이 있는 경우에 대한 문제를 해결하였다. 2000년대에 들어와서는 은퇴문제에 관한 이슈도 중요하지만 모델이 가지고 있는 불 확실성에 관한 연구가 크게 대두되고 있다. Gilboa and Schmeidler(1989)부터 시작된 이 문제는 투자자가 모델의 불 확실성 때문에 최악의 상황을 생각해서 소비와 투자를 선택한다는 개념이다. 이 연구는 min-max 문제로, 수학적인 모델로 발전하게 된다. Hansen and Sargent(2001)에서는 최악의 상황을 측도를 찾는 문제로 바꾸어 생각하였는데 이 때 측도를 바꾸

면서 생기는 차이를 벌칙 함수(penalty function)으로 정의하여 벌칙함수에 제약 조건을 주는 것으로 보았다. 또한 Chen and Epstein(2002)에서는 귀납적 효용함수(stochastic differential utility)를 이용하여 불확실 정도(ambiguity aversion)의 개념을 도입하였다. 이 후 시간 일관성(time consistence)에 문제를 발견하면서 연속 불확실성(smooth ambiguity)에 관한 연구도 진행되었는데 Klibanoff et al.(2005)에 잘 나와있다. 최근들어는 최적의 소비, 투자 문제가 경제의 여러 분야로 활용되는 모습을 보이고 있다. 대표적인 예가 기업재무의 한 축인 게임 이론적인 회사 주주와 그 대리인에 관한 문제(principal-agent problem), 그리고 시장의 미시구조에 관한 연구(market microstructure)이다. 이 두 분야는 1980년대를 시발점으로 하여 1990년 초부터 연속시간에서의 모델로 확장되었다. 회사주주와 대리인에 관한 문제는 Homstrom and Milgrom(1987)에 이산 시간에서의 모델로부터 시작하여 Schattler and Sung(1993)에서 처음으로 연속 시간으로 확장되었다. 시장의 미시구조는 거래 시장에 정보의 비대칭이 있을 때 평형가격이 어떻게 되며 시장의 움직임이 어떻게 되는지에 관한 연구로 Kyle(1985)이 순차적인 평형으로부터 연속시간에 관한 평형을 이끌어 내면서 비약적인 발전을 하게 된다. 이후 Kyle(1985) 모델을 Back(1992)이 연속 시간으로 확장하면서 모다 실제에 가까운 모델을 찾아주었다. 두 분야에 있어서는 앞으로 해야 할 부분이 많은 부분이며, 여러 상황이 존재할 수 있는 무궁무진한 분야라 할 수 있겠다.

4. 연속시간 모델들의 추정

연속 시간 방법을 이용한 영역에서의 최근 20년동안 가장 큰 업적은 경제 이론의 발전 뿐만 아니라 연속 시간에서의 모델들의 변수 추정 기술의 발전을 들 수 있다. 이는 Nelson(1989, 1990, 1991)에서 처음으로 GARCH 모델과 확산 과정(diffusion process)의 관계를 규명하면서부터 시작하였다. 그는 많은 GARCH 모델들이 확률적으로 변하는 변동성을 가지는 확산과정으로 근사된다는 것을 밝혀냈다. 다시 말해 많은 GARCH 모델들이 확산과정으로 분포적으로 수렴한다는 것을 증명하였다. 이산 시간의 데이터를 이용하여 GARCH 모델에 최대우도 추정법(maximum likelihood estimation, MLE)을 사용하는 것이 더 쉽게 때문에 수렴되는 GARCH 모델이 존재하는 확산과정에 대해서는 변수 추정이 가능하게 된다. 대표적인 추정 방법들에 대해서는 다음과 같다.

Maximum likelihood methods
Generalized method of moments(GMM)
Simulatied method of moments(SMM)
Efficient method of moments(EMM)
Nonparametric approaches

Methods based on empirical characteristic function

여기서는 각 방법에 대한 자세한 설명 보다는 중요한 논문들의 소개와 간단한 소개를 하도록 하겠다. 먼저 연속시간의 확산과정에 대해 조건부 밀도(conditional density)는 포커-플랭크 방정식(Fokker-Planck equation)을 풀면 구할수 있다. 다음의 확산 과정을 생각해보자.

$$dY = a(Y, \theta, t)dt + b(Y, \theta, t)dW_t$$

이 때 측정하고자 하는 변수가 θ라면 이 과정의 조건부 밀도는 다음의 편미분 방정식을 만족하 된다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial [af]}{\partial Y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 [b^2 y]}{\partial Y^2}$$

적당한 초기값을 이용하면 조건부 밀도를 구할 수 있게된다. 하지만 특정한 경우에 따라 확산과정이 stationary 하지 않은 경우가 존재할 수도 있으므로 MLE를 사용하는데에 있어서 조건을 잘 따져봐야 한다. 몇몇 경우에 대해서는 조건부 밀도가 닫힌 해(closed form solution)로 존재하게 되며 이 때 쓰이는 방법이 Maximum likelihood methods이다. 대표적으로 CIR(1985b)에 이 방법을 활용한 논문으로 Pearson and Sun(1994)를 들 수 있다. 이 밖에도 Chen and Scott(1993)을 보면 자세한 설명을 얻을 수 있다. 만약 조건부 밀도가 닫힌 해로 존재하지 않게 된다면 조건부 밀도는 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 얻을 수 있다. 하지만 이는 방대한 계산과 시간을 필요로 하는 단점이 있다. Ait-Sahalia(1999a, 1999b)에서 조건부 밀도의 닫힌 해가 존재하지 않을때 MLE방법이 사용될 수 있다는 것을 보여주었는데 정규 밀도 근처에서의 전이밀도(transition density)의 Hermite 확장을 이용하였다. 대부분의 응용에서 오더가 0 또는 2면 충분하다는 것을 보였으며 만약 이 방법이 멀티 확산 과정으로 확장이 될 수 있다면 엄청난 반향을 가져오게 될 것이다.

많은 경우에 포커-플랭크 방정식의 해가 명백하게 표현되지 않는다. 이럴 때 GMM 방법을 적용할 수 있는데 Hansen and Scheinkman(1995)에서 잘 설명되어 있다. 이산 시간의 데이터를 가지고 연속 시간에서 순간의 제약들을 이끌어 냈다. 간단히 말하면 극소의 발생기(infinitesimal generator)를 이용하여 연속시간의 마르코프(Markov) 과정들의 만들고 이 발생기가 마크로프 과정들에 의해 유도되는 순간의 제약을 만드는 데 사용된다. 이 순간 조건들을 이용하여 GMM 측정기와 테스트가 이루어 지게 되는 것이다. 하지만 이 방법은 보이지 않은 상태 변수(state variables)가 있을 때 적용하기 힘들다는 단점이 있다.

SMM(Simulated Method of Moments)은 Duffie and Singleton(1993)에서 제안한 방법으로 지속시간 상등한 마르코프 과정으로 제한한다. 먼저 추진변수(forcing variable)의 시뮬레이션을 관찰한다. 이 정보를 가지고 자산 가격이 변하게 된다. 여기서 자산 가격은 추진변수의 함수로 정의가 된다. 따라서 추정하고자 하는 변

수를 자산가격의 변화에 따른 모멘트를 맞추도록 추정을 하는 것이다. 그들은 SMM의 방법을 제시하면서 필요한 초기 조건을 찾아 주었고 stationary하지 않은 경우로부터도 적용 가능하다는 것을 밝혀냈다. Gallant and Tauchen(1996, 19997a, 1997b, 1998)에서는 보조의 모델을 세워 변수를 측정하는 방법을 발견해 냈다. 그들은 보조 모델(auxiliary model)의 로그 밀도(log density)의 미분을 계산하여 그것을 "score"라 하였다. Score의 구조적 모델(structural model)의 기대값을 이용하여 모멘트 조건들을 이끌어 내는 것이다. 이 방법의 장점은 score가 해석적 해를 갖는다는데 있다. 보조 모델의 변수들은 그들의 quasi-MLE로 바뀔수 있고 구조적 모델의 변수는 GMM 함수의 최소값을 찾으면서 찾아질 수 있다. 우리는 이 방법은 EMM(Efficient Method of Moments)라고 한다. 재무학에서의 응용된 논문으로는 Anderson and Lund(1997)을 들 수 있다. 이 밖에도 구조적 모델이 존재하지 않을 때 사용하는 nonparametric 접근법과 일차 점프 확산 과정에 잘 적용되는 경험적 특성함수를 기반한 방법(Methods based on empirical characteristic function)등 여러 방법들이 개발되어 활용되고 있으며 현재에도 다양한 방법들이 나오고 있다. 하지만 현재까지의 방법들은 하나의 과정에 관한 측정 방법에 그 한계가 있다. 실제 모델에 대한 측정을 하기 위해서는 여러 확산과정들(multivariate diffusion processes)이 있는 모델에 대한 측정 방법들도 개발되어야 한다.

5. 결론

지금까지 1960년대 후반부터 재무학에서 연속시간의 방법론이 어떻게 발전해 왔고 앞으로의 방향은 어떻게 될지에 대한 이야기를 옵션 및 파생상품들의 가격결정(derivatives pricing), 동적 소비, 투자 문제(dynamic consumption and portfolio choice) 그리고 연속시간 모델들의 추정(estimation)등, 세 가지 주제에 대해 중점적으로 이야기 해 보았다. 연속시간의 방법은 재무학 뿐만 아니라 경제학에서도 비약적인 발전을 가져오게 했을 뿐 아니라 실제 산업에서도 활용이 되게 하는, 즉 학문과 산업의 연관을 가져왔다. 하지만 이번 금융위기를 통해 아직 완전하지 않다는 것을 여실히 보여주었다. 보다 실제에 가깝고, 정확한 경제 모델과 그에 따르는 수치적인 방법이나 변수 추정 방법등의 개발은 시급히 필요한 과제로 부각되었다. 지금까지 연구되어 온 연속시간에서 정의된 경제학적 모델이나 그에 따른 해석, 그리고 계산은 이제 시작에 불과하다고 할 수 있다. 우리는 보다 현실에 맞는 경제 모델을 찾아 재해석할 필요가 있으며 연속시간 방법을 이용하였을 때 부딪치게 되는 한계를 극복할 수 있는 새로운 방법을 찾아야 할 것이다. 앞으로 재무학이나 경제학을 공부하는 모든 이에게 도움이 되었길 바라며 이 글을 마친다.

References

[1] Ait-Sahalia, Yacine, 1999a, Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: A closed-form approximation methods, Working paper, Princeton University.

[2] Ait-Sahalia, Yacine, 1999b, Transition densities for interest rates and other nonlinear diffusions, Journal of Finance 54, 499-547.

[3] Andersen, Torben G., and Jesper, Lund, 1997, Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate, Journal of Econometrics 77, 343-377.

[4] Back, Kerry, 1992, Insider trading in continuous time, Review of Financial Studies 5, 387-409.

[5] Back, Kerry, 1993, Asymmetric information and options, Review of Financial Studies 6, 435-472.

[6] Bhattacharya, Sudipto, and George M. Constantinides, eds., 1989, Theory of valuation: Frontiers of modern financial theory, Volume 1, (Rowman and Littlefield, Totowa, N.J.).

[7] Black, Fischer, and Myron Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy 81, 637-654.

[8] Bodie Z., Detemple J. B., Otruba S., Walter S., 2004, Optimal Consumption Portfolio Choices and Retirement Planning, J. Econ. Dynam. Control 28 1115-1148.

[9] Bodie Z., Merton R. C., Samuelson W.F., 1992, Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model, J. Econ. Dynm. Control 16 427-449.

[10] Brace, A., D. Gatarek, and M. Musiela, 1997, The market model of interest rate dynamics, Mathematical Finance 7, 127-154.

[11] Broadie, Mark, and Paul Glasserman, 1997b, Monte Carlo methods for pricing high-dimensional American options: An overview, Working paper, Columbia University.

[12] Breeden, Douglas T., 1979, An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities, Journal of Financial Economics 7, 265-296.

[13] Brennan, Michael J., and Eduardo Schwartz, 1978, Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis, Journal of Financial and Quantitative Analysis 13, 461-474.

[14] Brennan, Michael J., and Eduardo Schwartz, 1985, Evaluating natural resource investments, Journal of Business 58, 35-57.

[15] Brennan, Michael J., and Yihong Xia, 1999, Assessing asset pricing anomalies, Working paper, Anderson School of Management, UCLA.

[16] Briys, E., M. Bellalah, H. M. Mai, and F. De Varenne, 1998, Options, Futures and Exotic De- rivatives: Theory, Application and Practice (John Wiley and Sons).

[17] Chen Z. and Epstein L. 2002, Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time, Econometrica, 70, 1403-1443.

[18] Chen R., and L. Scott, 1993, Maximum likelihood estimation of a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates, Journal of Fixed Income 3, 14-31.

[19] Choi, K.J., Koo, H.K. 2005, A Preference Change and Discretionary Stopping in a Consumption and Portfolio Selection Problem, Mathematical Method and Operation Researches, 61, 419–435

[20] Choi, K.J. and Gyoocheol Shim, 2006, Disutility, Optimal Retirement, and Portfolio Selection, Mathemathical Finance 16, 443-467.

[21] Clewlow, Les, and Chris Strickland, 1998, Implementing Derivatives Models: Numerical Meth- ods (Wiley Series in Financial Engineering).

[22] Cox, John C., Jon E. Ingersoll, and Stephen A. Ross, 1985a, An intertemporal general equilibrium model of asset prices, Econometrica 53, 363-384.

[23] Cox, John C., and Mark Rubinstein, 1985, Options Markets, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.).

[24] C., Jon E. Ingersoll, and Stephen A. Ross, 1985b, A theory of the term structure of interest rates, Econometrica 53, 385-407.

[25] Cox, John C., and Chi-fu Huang, 1989a, Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process, Journal of Economic Theory 49, 33-83.

[26] Cox, John C., and Stephen A. Ross, 1976a, A survey of some new results in financial options pricing theory, Journal of Finance 31, 382-402.

[27] Cox, John C., and Stephen A. Ross, 1976b, The valuation of options for alternative stochastic processes, Journal of Financial Economics 3, 145-166.

[28] Cvitani6, Jaksa, and I. Karatzas, 1993, Hedging contingent claims with constrained portfolios Annals of Applied Probability 2, 767-818.

[29] Dempster, M. A. H., and S. R. Pliska, eds., 1997, Mathematics of Derivative Securities (Cambridge University Press, Cambridge).

[30] Dothan, Michael, 1990, Prices in Financial Markets (Oxford University Press, New York).

[31] Duffie, Darrell, 1988, Securities Markets: Stochastic Models (Academic Press, Boston).

[32] Duffie, Darrell, 1996, Dynamic Asset Pricing Theory (Princeton University Press, Princeton, N.J.).

[33] Duffie, Darrell, and Larry Epstein, 1992, Stochastic differential utility and asset pricing, Econometrica 60, 353-394.

[34] Duffie, Darrell, and Kenneth Singleton, 1993, Simulated moments estimation of Markov models of asset prices, Econometrica 61, 929-952.

[35] Dybvig Philip H., and Liu Hong, 2006, Lifetime Consumption and Investment: Retirement and Constrained Borrowing, Working Paper, Washington University.

[36] Gallant, A. Ronald, and George Tauchen, 1996, Which moments to match, Econometric Theory 12, 657-681.

[37] Gallant, A. Ronald, and George Tauchen, 1997a, Estimation of continuous-time models for stock returns and interest rates, Macroeconomic Dynamics 1, 135-168.

[38] Gallant, A. Ronald, and George Tauchen, 1997b, Estimation of continuous time models for stock returns and interest rates, Macroeconomic Dynamics 1, 135-168.

[39] Gallant, A. Ronald, and George Tauchen, 1998, Reprojecting partially observed systems with application to interest rate diffusions, Journal of American Statistical Association 93, 1-24.

[40] Gilboa and Schmeidler, 1989, MaxminExpected Utility with Non-Unique Prior, Journal of Mathematical Economics 18, 141-153.

[41] Hansen, Lars Peter, and Jose Alexandre Scheinkman, 1995, Back to the future: Generating moment implications for continuous-time Markov processes, Econometrica 63, 767-804.

[42] Hansen, Lars Peter, and Sargent, Thomas J., 2001, Robust control and Model Uncertatinty, American Economic Review, 91, 60-66.

[43] Harrison, J. M., 1985, Brownian Motion and Stochastic Flow Systems (Wiley, New York).

[44] Harrison, J. M., and D. Kreps, 1979, Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, Journal of Economic Theory 2, 381-408.

[45] He, Hua, and N. D. Pearson, 1991, Consumption and portfolio with incomplete markets and shortsale constraints: The finite-dimension case, Journal of Economic Theory 54, 259-304.

[46] Heston, Steve 1993, A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, Review of Financial Studies 6, 327-343.

[47] Ho, Thomas, and S. Lee, 1986, Term structure movements and the pricing of interest rate contingent claims, Journal of Finance 41, 1011-1029.

[48] Holmstrom, Bengt, and Paul Milgrom, 1987, Aggregation and linearity in the provision of intertemporal incentives, Econometrica 55, 303-328.

[49] Hull, John C., 1999, Options, Futures and Other Derivative Securities (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.)

[50] Hull, John, and Alan White, 1987, The pricing of options on assets with stochastic volatilities, Journal of Finance 42, 281-300.

[51] Ingersoll, Jonathan, 1987, Theory of Financial Decision Making (Rowman and Littlefield, Totowa, N.J.).

[52] Jamshidian, Farshid, 1989, An exact bond options pricing formula, Journal of Finance 44, 205-209. Jamshidian, Farshid, 1991, Bond and option evaluation in the Gaussian interest rate models, Research in Finance 9, 131-170.

[53] Jang B., Koo H.K., Liu H., and Leowenstein M., 2007, Liquidity Premia and Transaction Costs, Journal of Finance 62, 2329–2366.

[54] Jeanblanc, M., Lakner, P., Kadam, A., 2004, Optimal Bankruptcy and Consumption/Investment Policies on an Infinite Horizon with a Continuous Debt Repayment Until Bankruptcy. Mathematical Operation Research, 29, 649-671.

[55] Judd, Kenneth, 1998, Numerical Methods in Economics (MIT Press, Cambridge, Mass.).

[56] Karatzas, I., J. P. Lehoczky, and S. E. Shreve, 1987, Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon, SIAM Journal of Control and Optimization 25, 1157-1186.

[57] Karatzas, I., and S. E. Shreve, 1988, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Graduate Texts in Mathematics, 113 (Springer-Verlag, New York).

[58] Karatzas, I., and S. E. Shreve, 1998, Methods of Mathematical Finance, Applications of Mathematics, 39 (Springer-Verlag, New York).

[59] Karatzas Ioannis, and Wang Hui, 2000, Utility Maximization with Discretionary Stopping, SIAM J. Control Optim. 39, 306 - 329.

[60] Klibanoff P., Marinacci M., and Mukerji S., 2005, A smooth model of decision making under ambiguity, Econometrica, 73, 1849-1892.

[61] Kloeden, P. E., and E. Platen, 1992, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations (Springer-Verlag, New York).

[62] Kyle A. S., 1985, Continuous Auctions And Insider Trading, Econmetrica, 6 1315–1335.

[63] Leland, Hayne, 1985, Options pricing and replication with transactions costs, Journal of Finance 40, 1283-1301.

[64] Lucas, Robert E., 1978, Asset prices in an exchange economy, Econometrica 46, 1429-45.

[65] Malliaris, A., 1982, Stochastic Methods in Economics and Finance (North-Holland, Amsterdam).

[66] Merton, Robert C., 1969, Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case, Review of Economics and Statistics 51, 247-257.

[67] Merton, Robert C., 1971, Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model, Journal of Economic Theory 3, 373-413.

[68] Merton, Robert C., 1973a, Theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics 4, 141- 183.

[69] Merton, Robert C., 1973b, An intertemporal capital asset pricing model, Econometrica 41, 8678-87. Merton, Robert C., 1990, Continuous-Time Finance (Oxford University Press, New York).

[70] Miltersen, K., K. Sandmann, and D. Sondermann, 1997, Closed form solutions for term structure derivatives with lognormal interest rates, Journal of Finance 52, 409-430.

[71] Marek, Musiela, and Marek Rutkowski, 1997, Martingale Methods in Financial Modelling (SpringerVerlag, Berlin).

[72] Nelson, Daniel B., 1989, Modeling stock market volatility changes, Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economics Statistics Section, 93-98.

[73] Nelson, Daniel B., 1990, ARCH models as diffusion approximations, Journal of Econometrics 45, 7-39.

[74] Nelson, Daniel B., 1991, Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, Econometrica 59, 347-370.

[75] Pearson, Niel, and Tongsheng Sun, 1994, Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the CIR model, Journal of Finance 49, 1279-1304.

[76] Rogers, L. C. G., and D. Talay, eds., 1997, Numerical Methods in Finance (Publications of the Newton Institute).

[77] Schattler H. and Sung J., 1993, The first-order approach to the continuous-tim principal-agent problem with exponential utility, Journal of Economic Theory, 61, 331-371.

[78] Sethi S. P., Taksar M. I., and Presman E. L., 1992, Explicit Solution of a General Consumption/Portfolio Problem with Subsistence Consumption and Bankruptcy, Journal of Econometric Dynamics and Control, 16, 747-768