Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 2, December 1999, Pages 193–198

ON HOPF ALGEBRA ACTIONS

박 준 석

ABSTRACT. Hopf대수들의 환상에서의 여러가지 작용 중 invariant대수, A^H의 성질에관한 문제해결 방법을 모색하고 도구로서 사용되는 smash product와 그의 일반화인 crossed product가 언제 semiprime이 되는가 하는 문제를 해결하기 위하여 관련되는 문제를 알아본다.

1. INTRODUCTION

양자군이란 무엇인가? 그리고 수학의 어떤 분야들이 양자군의 연구와 관련이 있는가 알아 보면 많은 위상학자가 매듭이론과 관련지어 양자군을 연구하여 오고 있으며, 수리물리학자는 양자론, 장론, quantum inverse scattering method와 Yang-Baxter 방정식과 연관하여, 또한 기하학자는 비가환기하와 연관하여, 그리고 리론과 대수군을 연구하는 학자는 양의 표수를 갖는 대수적연구와 관련하여, 환론을 연구하는 학자는 Hopf대수를 연구하기 위하여 양자군을 연구하여 오고 있다. 양자군은 군이 아니다! 그것은 일반적으로 비가환환이다. 그것은 어떤 예외적 구조를 갖는 삼각 또는 여삼각의 구조와 같은 Hopf대수일 것이다. 해석학적 연구에서는 C^* - 대수일 것이다.

양자군은 Jimbo, Drinfeld 그리고 Woronowiez 에 의하여 소개되어 졌다. Drinfeld는 양자군을 non-commutative, non-cocommutative Hopf대수로서 정의하였으며[DR 86] 대부분의 작업은 g 가 semisimple Lie대수일 때 quantum enveloping algebra, $U_q(g)$ 와 G 가 affine algebraic group 일때 quantum coordinate ring, $O_q(G)$ 에 촛점이 맞추어 졌다.

Yang-Baxter방정식은 1차원에서의 many-body문제에 있어서의 scattering S-matrix의 분해조건으로서 Yang의 논문[Yan 67]에 처음으로 나타났고 또한 통계역학에 있어 Baxter논문[Bax 72]에 나타난다. 이는 quantum integrable system의 construction에 대하여 Faddeev, Sklyanin 그리고 Takhtadjian[Fad 84]이 1978-79년경에 만들어 냈던 quantum inverse scattering방법에서 중요한 역할을 한다. 조직적인 방법으로 Yang-Baxter방정식의 해들을 찾고자 하는 시도가 양자군론을 이끌어 냈다[Dri 87]. Yang-Baxter방정식의 해를 R-matrices라 한다. [Dri 85], [Dri 87], [Jim 86a], [Jim 86b] 그리고 [KS 80]등 많은 논문에서 R-matrices를 찾으려고 노력하였고 1980년대에 많은 해들이 발견되었다.

Drinfeld는 braided Hopf대수 (또는 quasi-triangular Hopf대수)의 개념을 소개하였는데 이는 이들상의 module위에서의 Yang-Baxter 방정식의 해들을 생성한다. 이 사실은 Yang-Baxter 방정식의 해를 조직적으로 찾는 방법을 제공한다. 그러므로 Braided Hopf대수는 양자군론의 핵심이라 할 수 있다. 쌍대적 개념으로 cobraided Hopf대수([Hay 92], [LT 91], [Maj 91b], [Sch 92])가 있는데 Faddeev, Reshetikhin 그리고 Takhtajian등은 Yang-Baxter의 해로부터 cobraided Hopf대수를 만드는 법을 찾아냈다[RTF

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 16s40.
Key words and phrases. Quantum groups, Hopf algebras, Smash products, crossed products.

89]. 양자군 $GL_q(2)$와 $SL_q(2)$ 그리고 $M_q(2)$는 위의 방법으로 얻어질 수 있는 co-braided Hopf대수들이다.

Braided Hopf대수는 Yang-Baxter방정식의 해를 제공하므로 문제는 그러한 Hopf대수들을 충분히 많이 찾는 것이다. Drinfeld는 가역antipode를 갖는 유한차원 Hopf대수로부터 braided Hopf대수를 만드는 한가지 방법으로 quantum double constuction을 개발하였다[Dri 87].

Hopf대수의 개념은 manifold상에서의 Hopf의 작업을 추상화 시킨 대수적위상학자를에 의하여 개발되었다. 또한 리군과 대수적군의 표현론으로부터 대두되었다([Abe 80], [DG 70], [HOC 81], [Ser 93]). 양자군을 알기전까지 non-commutative이고 non-cocommutative 한 Hopf대수의 예들은 별로 많지 않 았지만 1980년대 양자군의 출현으로 양상이 바뀌었다.

따라서 Hopf 대수의 구조를 밝히는 연구가 최근 진행되어져 오고 있다. 접근의 한 방법은 Weyle algebra, $U_q(sl(2))$, $S_q(sl(2))$ 그리고$A_q(2)$ 등과 같은 Hopf대수의 구조를 파악하여 일반화 시키는 것이고 또다른 방법은 대부분의 Hopf 대수가 iterated skew polynomial 환이 되므로 skew polynomial 환과 q-skew polynomial 환의 구조를 파악하는 것이다.

1.1. 정의

Throughout we let k be a field. Tensor products are assumed to be over k unless stated otherwise. Let H be a Hopf algebra over a field k. We let Δ be the comultiplicatin and we will use the sigma notation, $\Delta\ H \to H \otimes H$, $\Delta(h) = \Sigma_{(h)} h_1 \otimes h_2$. Let ϵ be the counit and S be the antipode of H.

An algebra A is said to be a *left H-module algebra* if

[1.1] A is a left H-module, via $h \otimes a \mapsto h \cdot a$
[1.2] $h \cdot (ab) = \Sigma(h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$
[1.3] $h \cdot 1_A = \epsilon(h)1_A$

for all $h \in H$ and for all $a, b \in A$.

Let A be a left H-module algebra then the *smash product algebra* $A\#H$ is defined as follows: For all $a, b \in A$ and for all $h, k \in H$,

[2.1] as k-spaces, $A\#H = A \otimes H$. We write $a\#h$ for the element $a \otimes h$.
[2.2] multiplication is given by

$$(a\#h)(b\#k) = \Sigma a(h_1 \cdot b)\#h_2 k.$$

We show that $A \cong A\#1$ and $H \cong 1\#H$; for this reason we frequently abbrivate the element $a\#h$ by ah.

Let H be a Hopf algebra and A an algebra. Assume that H measures A (that is, [1.2] and [1.3] are satisfied) and that σ is an invertible map in $Hom_k(H \otimes H, A)$. The *crossed product* $A\#_\sigma H$ of A with H is the set $A \otimes H$ as a vector space, with multiplication

$$(a\#h)(b\#k) = \Sigma a(h_1 \cdot b)\sigma(h_2, k_1)\#h_3 k_2$$

all $h, k \in H, a, b \in A$. Here we have written $a\#h$ for the tensor $a \otimes h$.

Let $A^H = \{a \in A | h \cdot a = \epsilon(h)a$ for all $h \in H\}$. Then the map $\hat{t}\ A \to A$ given by $\hat{t}(a) = t \cdot a$ is an A^H-bimodule map with values in A^H.

Let C be a coalgebra and $B \subset A$ be algebras. Consider an action $C \otimes B \to A$, given by $c \otimes b$, which measures B to A. Then the measuring is *inner* if there exists a convolution invertible map $u \in Hom(C, A)$ such that for all $h \in C, b \in B$,

$$h \cdot b = \Sigma u(h_1) b u^{-1}(h_2)$$

.

Let R be any ring. Let $\mathcal{F}$ denote the filter of ideals of R which have zero left and right annihilator. Let $\mathcal{S}$ be the set of all pairs (I, f), where $I \in \mathcal{F}$ and $f : I \to R$ is a left R-module map. Define $(I, f) \sim (J, g)$ if $f = g$ on some $K \in \mathcal{F}, K \subseteq I \cap J$. Then $Q^l(R) = \mathcal{S}/\sim$. Define the *symmetric Martindale quotient ring* $Q(R)$ as

$$Q(R) = \{q \in Q^l(R) \mid qI \subseteq R, some I \in \mathcal{F}\}$$

. Now we return to actions of Hopf algebras. Let A be an H-module algebra. It will be useful to replace $\mathcal{F}$ by $\mathcal{F}_H$, the filter of H-stable ideals of A with zero annihilator. One may repeat the above constructions, obtaining ${Q^l}_H(A)$ and $Q_H(A)$. In general Q_H can be genuinely smaller than Q.

Let A be an H-module algebra. Then the H-action on A is $\mathcal{F}$ *-continuous* if given any $I \in \mathcal{F}$ and $h \in H$, there exists $J \in \mathcal{F}$ such that $h \cdot J \subseteq I$.

The H-action is X*-inner* if it becomes inner when extended to $Q(A)$. The H-action is X_H*-inner* if it becomes inner when extended to $Q_H(A)$.

2. HOPF대수의 작용

Hopf대수의 환론적 연구의 한 주요 분야는 환상에서의 Hopf대수의 여러 가지 action을 연구하는 것이다. 세부적으로 관심이 있는 몇가지 분야는

[1] Actions of finite-dimensional Hopf algebras and smash products,
[2] Crossed products and twisting products,
[3] Inner actions

이다.

연구의 한 방법으로는 위에서 예시한 Hopf대수들의 구조를 조사하는 방법외에 유한군의 action에서 알려진 개념들을 Hopf대수에로의 확장을 시도하여 유사한 결과들을 도출하는 것이다.

1. 특별히 H가 유한차원 Hopf대수일 때 H-module algebra A의 invariant subalgebra A^H와 A와의 관계를 규명하기 위하여 smash product $A\#B$을 도구로 사용한기도 한다. 이는 A^H와 $A\#H$간의 관계는 Morita context 표현이 가능하기 때문이다. $A\#B$는 군의 action연구에 유용하게 사용되는 skew group ring $A * G$ (또는 trivial crossed product)의 Hopf대수로의 일반화된 개념이다. 따라서 $A * G$ 에서의 방법을 확장하여 이용을 시도 하기도한다. associative ring의 유한자기동형군들의 fixed ring에서의 여러 개념들과 결과들을 Hopf 대수로의 일반화 작업들이 이루어지고 있다. 이는 $H = kG$ 같은 특별한 Hopf대수 들인 경우 H 의 원소 g 가 H-module algebra A 의 자기동형사상으로서 작용하기 때문이다.

2. Hopf대수에서 crossed product는 smash product의 일반화된 개념으로서 Hopf대수의 어떤 한 cocycle에 의하여 twisted되어 진 것이다. 이 construction은 군의 작용에서 광범위 하게 연구되어져 왔다. crossed products $B = A\#_\sigma H$를 extension $A \subset B$의 특별한 종류(cleft extension)로 특성화시켜 연구하는 작업이 Doi 와 Takeuchi ([DT86], [BM 89])에 의하여 이루어졌다.

3. 1970년대와 1980년대에 group action의 연구에 있어서 기본적 테크닉으로서 환 R의 X-inner automorphism이 있었다. R이 prime일 때 이들은 R의 자기동형사상으로서 R의 Martindale quotient ring으로 확장시켰을 때 inner가 된다. 이 개념은 1975년 V.K. Kharehenko에 의하여 환론에 소개되었으며 같은 시기에 G. Pedersen과 G. Elliot에 의하여 operator algebras에 소개되었다. 여기에서의 방법을 Hopf대수의 action으로 확장시켜 연구 중이다.

3. CROSSED PRODUCTS

정리 1. *If $A\#H$ is a simple ring then A is Noetherian provided A^H is Notherian.*

위의 사실이 좀 더 일반적인 경우에도 성립함이 [BeM 86]에서 다음과 같은 내용으로 보여져있다.

정리 2. *Assume that $A\#H$ is semiprime and every non-zero ideal of $A\#H$ intersects A nontrivially then if A^H is (right) Notherian or Artinian, so is A.*

위 정리의 가정으로부터 언제 $A\#H$가 semiprime이 되는가 하는 조건은 매우 유용하다. $H = kG$ 이고 $|G|^{-1} \in k$일 때 만일 A가 semiprime이면 $A\#H$가 semiprime임이 밝혀져 있다[FM]. $H = (kG)^*$인 경우에도 위의 사실이 성립한다[CM]. 위의 두 경우 모두 H가 semisimple인 경우이므로 다음과 같은 문제가 제시되어져 있다.

문제 1. *If H is finite dimensional semisimple, and A is a semiprime H-module algebra, is $A\#H$ semiprime?*

좀더 일반적인 경우인 crossed product 에서도 같은 문제가 제시되어 있다.

문제 2. *If H is finite-dimensional semisimple and A is semiprime, is any crossed product $A\#_\sigma H$ semiprime?*

1996년 Ruminin은 A가 semiprime Goldie이고 H의 action이 classical algebra of quotient $Q(A)$로 확장이 가능할 때 위의 사실이 성립됨을 보였다[Ru 96].

정리 3. *Let H be a finite-dimensional semisimple Hopf algebra and A be a crossed H-module algebra. If A is a semiprime right(left) Goldie algebra and the action of H is extended to the maximal algebra of quotients $Q(A)$ then $A\#_\sigma H$ is a semiprime right(left) Goldies.*

위 정리의 가정으로부터 다음과 같은 문제가 또한 제기되어질 수 있다.

문제 3. *When do the $H-$action on A extend to an action on $Q(A)$?*

부분적으로 다음과 같은 결과가 알려져 있다[M 93a].

정리 4. *Let H have bijective antipode and let A be an H-module algebra. If the H-action on A is $\mathcal{F}$-continuous, then it extends to an action on $Q(A)$.*

정리 5. *Let H be a pointed Hopf algebra, and let A be an H-module algebra. Then the H-action on A is $\mathcal{F}$-continuous.*

정리2 의 가정중 하나로부터 다음과 같은 문제도 제기되어 진다.

문제 4. *When do ideals of $A\#_\sigma H$ intersect A non-trivially ?*

H가 irreducible이고 H의 prime ideal들로 이루어진 리대수 L이 A의 quotient Q에서 outer derivation으로 작용하고 A가 prime인 경우에 완전한 답이 주어졌다[BeM 92].

H가 finite-dimensional semisimple 이고 A가 semisimple artinian이면 $A\#H$도 semisimple artinian임이 보여져 있다[CF 86]. 같은 문제가 crossed product에서도 제기되어 보여졌다.

정리 6 (BM). *Let H be a semisimple Hopf algebra. If A is semisimple artinian, then so is $A\#_\sigma H$.*

좀 더 일반적인 상황으로서 A가 artinian이 아닌 경우를 생각하여 볼 수 있다[BM 89].

정리 7. *Let H be a finite dimensional semisimple, and $A\#_\sigma H$ be a crossed product with A semiprime. Then $A\#_\sigma H$ is semiprime if the H-action on A is inner.*

A가 inner가 아니면 위의 사실은 성립하지 않는다. Lorenz와 Passman의 primitivity machine을 사용하여 위 사실의 확장으로서 H가 inner일 때 A가 semiprime이면 $A\#_\sigma H$도 semiprime임을 보일 수 있다[LoP].

최근에 H의 작용이 X_H-inner일 때의 증명이 되어 있다[Msch]. X_H-inner는 H의 작용을 A의 H-symmetric quotient ring Q_H로 확장시킬 수 있는 경우이다. 최근 몇 연구들은 Hopf-module 대수의 quotient algebra에 관한 것이다. [Cohen 86]에서 Martindale ring of quotients 개념의 Hopf-module로의 확장이 이루어져 있다. 1993년 D.A. Rumynin은 다음 사실을 보였다[Ru 93].

정리 8. *The action of a finite-dimensional semisimple Hopf algebra is uniquely extended to the left maximal quotient algebra.*

군에서의 X-outer의 Hopf대수에서의 적합한 정의가 무엇이며 정의가 되어졌다면 그 조건하에서 $A\#_\sigma H$가 semiprime인가 하는 것은 어렵고도 중요한 문제로 남아있다.

H의 작용을 restrict시켜 또는 H 자체의 조건을 restrict시켜 $A\#_\sigma H$의 semiprimeness를 얻은 경우들이 있다.

정리 9. *Let H be finite-dimensional semisimple, and let $A\#_\sigma H$ be a crossed product with A semiprime. Then $A\#_\sigma H$ is semiprime in the follwing two cases:*

(1). *H is commutative*
(2). *H is pointed cocommutative[Ch 92].*

1996년 Ruminin은 다음 사실들을 보였다[Ru 96].

정리 10. *Let H be a finite-dimensional Hopf algebra and let A be a σ -crossed H-module algebra one of the follwing two conditions in fulfield. (1) H is pointed (2) σ is trivial. If A is semiprime right(left) Goldie then so is $A\#_\sigma H$.*

Hopf대수적 방법을 connected affine algebraic group G의 작용에관한 정보를 얻는데 사용하고 다시 이 결과들을 어떤 affine Hopf대수의 crossed product에 적용하기도 한다[Chin 92].

REFERENCES

[Abe 80] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980

[Bax 72] R .J. Baxter, *Partition functions for the eight-vertex lattice model*, Ann. Physics 79(19972), 193–228

[BeM 86] J. Bergen, S. Montgomery, *Ideals and quotients in crossed products of Hopf algebras*, J. Algebra 151(1992), 374–439

[Bem 92] J. Bergen, S. Montgomery, *Ideals and quotients in crossed products of Hopf algebras*, J. Algebra 152(1992), 374–396

[BM 89] R.J. Blattner, S. Montgomery, *Crossed product and Galois extensions of Hopf algebras*, Pacific J. 137(1989), 37–54

[CF 86] M. Cohen, D. Fischman, *Fopf algebra actions*, J. Algebra 100(1986), 363–379

[Ch 92] W. Chin, *Crossed products of semisimple cocommutative Hopf algebras*, Proc. AMS 116(1992), 321–327

[Chin 92] W. Chin, *Actions of solvable algebraic groups on noncommutative rings*, Contemporary Math.,124,(1992), 29–38

[CM] M. Cohen, S. Montgomery, *Group-graded rings, smash products, and group actions*, Trans. AMS 282(1984), 237–258

[Cohen 86] M. Cohen, *Smash product, inner actions and quotient rings*, Pacific J. of Math., 125(1), (1986), 45–66

[DG 70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes Algebriques*, North Holland Pub. Co., Amsterdam, 1970

[Dr 86] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proc. Int. Cong. Math. Berkeley, 1(1986), 789–820

[Dri 85] V. G. Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. 32(1985), 254–258

[Dri 87] V. G. Drinfeld, *On almost cocommutative Hopf algebras*, Lenningrad Math. J. 1(1990), 321–342

[Fad 84] L. D. Faddeev, *Integrable models in (1+1)- dimensional quantum field theory*, Lectures at Les Houches 1982, Elsvier Science Publishers B.V., Amsterdam, New York, 1984

[FM] J. W. Fisher, S. Montgomery, *Semiprime skew group rings*, J. Algebra 52(1978), 241–247

[Hay 92] T. Hayashi, *Quantum groups and quantum determinants*, J. Algebra 152(1992), 146–165

[Hoc 81] G. P. Hochschild, *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras*, Volume 75 of Graduate Texts in Math. Springer-Vetlag, New York, 1981

[Jim 86a] M. Jimbo, *A q-analogue of U(gl(N+1)), Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 11(1986), 247–252

[Jim 86b] M. Jimbo, *Quantum R-matrix for the generalised Toda system*, Comm. Math. Phys. 102(1986), 537–547

[KS 80] P. P. Kulish, K.E. Skylanin, *Solutions of the Yabg-Baxter equation*, J. Soviet Math. 19(1982), 1596–1620

[LoP] M. Lorenz, D.S. Passman, *Two applications of Maschke's theorem*, Comm. Alg. 8(1980), 1853–1866

[LT 91] R. G. Larson, J. Towber, *Two dual classes of bialgebras related to the concepts of "quantum group" and "quantum Lie algebra"*, Comm. Algebra 19(1991), 3295–3345

[Maj 91b] S. Majid, *Representations, duals and quantum doubles of monoidal categories*, Rend. Circ. Math. Palermo (2) Supp. 26(1991), 197–206

[RTF 89] N. Yu. Reshetikhin, L.A. Takhtadjian, L.D. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Lenningrad Math. J. 1(1990), 193–225

[Ru 93] D. A. Rumynin, *Maiximal quotient algebra of a Hopf-module algebra*,Algebra and Logic, 32(5),(1993), 300–308

[Ru 96] D. A. Rumynin, *Remarks on rings of quotients*, Comm. in algebra, 24(3),(1996), 847–856

[Sch 92] P. Schauenburg, *On coquasitriangular Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Volume 67 of Algebra Berichte Verlag Reinhard Fischer, Munchen, 1992

[Ser 93] J. P. Serre, *Gebres*, Enseign. Math. (2) 39(1993), 33–85

[Yan 67] C. N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. 19(1967), 1312–1315

호서대학교 수학전공
E-mail address: `junspk@dogsuri.hoseo.ac.kr`