Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 2, December 1999, Pages 189–192

STABILITY OF FUNCTIONAL EQUATIONS, ISOMETRIES AND OPERATORS
(함수방정식, 등장사상, 작용소의 안전성 연구)

이영환

ABSTRACT. 함수방정식의 안전성 연구를 소개하고 이와 유사한 연구인 등장사상의 안전성 문제와 바나하 대수상에서 작용소들의 안전성 연구에 대하여 최근 연구동향을 분석하며 이 분야에 관한 우리의 연구 진척 상황을 소개한다.

1. 함수방정식의 안전성

함수방정식이란 Cauchy 방정식처럼 $f(x+y) = f(x)+f(y)$와 같이 함수들의 방정식으로 주어지는 방정식이다. $f(x)$가 실수 공간에서 정의되는 함수라고 하면 이 방정식의 해는 $f(x) = \lambda x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ 형태가 된다. 이와같은 함수방정식은 지수함수방정식 $f(x+y) = f(x)+f(y)$, sine함수방정식 $f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$, Quadratic 함수방정식 $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)-2f(y)$, 감마함수방정식 $f(x+1) = xf(x)$, 베타함수방정식 $f(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}f(x, y)$등 다양하다.

1940년 Ulam[2, 5, 22]은 섭동된 함수방정식에 관심을 가지고 다음과 같은 문제를 제시했다.

A는 Group이고 B는 Metric Group이라 하자. 주어진 ε에 대하여 적당한 $\delta > 0$가 존재하여 $f : A \to B$가

$$d(f(x+y), f(x)+f(y)) \leq \delta \ (x, y \in A)$$

이면 $d(f(x), h(x)) \leq \varepsilon$이고 $h(x+y) = h(x)+h(y)$를 만족하는 h가 존재하는가?

이 문제의 해답은 1941년 Hyers[9]에 의해서 주어진다. 즉,

(S, +)가 Abelian Semigroup이고 E는 Banach space라 하자.
$f : S \to E$가

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \varepsilon \ (x, y) \in S$$

이면 $g(x+y) = g(x)+g(y)$이고, $\| f(x) - g(x) \| \leq \varepsilon$을 만족하는 함수 g가 $g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$로서 주어진다.

이러한 문제를 함수방정식의 안전성 문제라고 한다. 위 문제는 다양하게 일반화되었다.

한 예로서 함수방정식의 안전성 연구에 있어서 Bounded 조건은 Unbounded로 바꾸어 유사한 결론을 얻는 연구가 진행 되었다. 즉 1978년 Rassias[21]는 $\|f(x+y) -$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 39B72, 46A05, 46J05, 47H15.
Key words and phrases. Stability of functional equation, Approximate isometry, Jordan mapping, derivation, Banach algebras.

$f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$라는 조건으로부터 유사한 결론을 얻었으며 1994년 Gavrata[4]는 $\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \varphi(x,y)$라는 더욱 일반화된 조건으로부터 유사한 결론을 얻었다.

또한 함수 $f(x)$의 정의역과 공역부분을 일반화시키는 연구도 많이 진행되었다.[2, 3, 5] 그러나 연구의 활력소가 된것은 다양한 함수방정식에도 안전성 정리가 적용된다는 것이다. Survey paper로는 1992년 Hyers or Rassias[5]의 ”Aproximate homomorphisms”와 1995년 G.L.Farti[2]의 ”Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables”가 함수방정식의 안전성에 관하여 가장 잘 종합하여 표현한 논문으로 판단된다.

우리[13]는 ”Beta 함수방정식의 안전성 문제”를 해결 하였으며, 일반화된 Beta 함수방정식의 안전성으로 확장 하였다. 국내에서도 전길웅, 이양희, 김광휘, 박규홍, 정순모, 이은휘, 김병도, 박달원[11, 14, 15, 16, 17,28, 19] 교수등이 국내외 주요 저널에 논문을 출판 하는 등 깊은 연구가 진행 되었다.

2. 등장사상의 안전성

등장사상의 안전성 문제는 함수방정식의 안전성 문제로부터 출발 하였으며 주로 Banach 공간 위에서 근사 등장사상 즉,$| \| f(x_0) - f(x_1) \| - \| x_0 - x_1 \| | \leq \varepsilon$ 형태를 만족하는 조건으로부터 f가 등장사상이 되든지 아니면 f와 거리가 아주 가까이 있는 등장사상을 찾는 것이다. 연속함수 공간에서 등장사상의 안전성 문제는 잘 밝혀져 있으며 Banach-Stone 정리의 일반화와 연관되어 많은 결과가 나왔다.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가

$$f(t) = \begin{cases} (1+\varepsilon), & t < 1 \\ (1-\varepsilon)x + 2\varepsilon, & t > 1 \end{cases}$$

으로 주어지면 $f(x)$는 비선형 $\varepsilon - Lipschiz$사상이 된다. 즉

$$| \| f(x) - f(y) \| - \| x - y \| | < \varepsilon \| x - y \|$$

을 만족한다. 이때 항등사상인 선형등장사상 I를 잡으면

$$| I(x) - f(x) | = | x - f(x) | \leq 3\varepsilon \mid x - y \mid$$

을 만족한다. 이것을 바나하 공간으로 확장하여 생각하면 다음과 같은 Jarasz[11]의 문제를 얻는다.

A와 B가 실 바나하 공간일 때
$T : A \to B$가 $\varepsilon - Lipschiz$ 사상이면 A와 B는 선형적으로 동형인가?

Jarosz는 A,B가 연속함수 공간이고 ε이 충분히 작다는 조건하에서 이 문제가 성립함을 보였고 일반화된 공간에서 성립여부의 연구가 미해결 문제로 대두되었다. 우리[12]는 이 문제가 벡터값을 갖는 일반화된 함수공간에서도 성립함을 보였다. 등장사상이 여러 형태로 변형된 조건하에서, 등장사상일 때 성립하는 Banach-Stone 정리와 더불어 등장사상과 거리가 아주 가까이 있다는 성질들을 다루는 안전성 연구는 비선형 사상으로부터 선형 동형성을 얻는 중요한 과제로 생각된다.

3. 바나하 대수상에서 작용소의 안전성

함수방정식의 안전성 문제와 등장사상의 안전성 문제는 바나하 대수상에서 여러 작용소에도 응용되어지기 시작했다. 여기에 대한 연구의 시초는 Jarosz[11]의 ”Perturbations of Banach Algebra”의 교재부터라고 생각된다. 여기서 그는 $\varepsilon - Homomorphism$을 다음과 같이 정의 했고, 이것의 연속성을 보였다.

T가 바나하 대수 A에서 연속함수공간 C(S)로 가는 선형사상이고

$$\| T(fg) - T(f)T(g) \| \leq \varepsilon \| f \| \| g \|, (f,g) \in A$$

을 만족하면 $\varepsilon - Homomorphism$ 이다. 이때 T는 연속함수가 되며 $\| T \| \leq 1 + \varepsilon$ 이다.

그후 Johnson[8, 9]은 이러한 근사준동형의 연속성 문제를 일반화된 공간으로 확장했을 뿐만아니라 안전성 문제 즉 T 가까이에 Homomorphism을 찾는 문제를 연구하였다.

우리는 Homomorphism 보다 일반화된 사상으로 Noncommutative Banach Algebra 상에서 Jordan Homomorphism의 연속성 및 안전성 문제가 해결되리라 생각하고 연구한 결과 약간의 조건이 첨가되는 부분적인 해결을 하였고 [11], 계속 연구를 진행하고 있다.

이제 우리는 Derivation 연산자에 관해서는 관심을 갖게 되었다.

바나하 대수 A 상에서 정의되는 Derivation A는

$$D(ab) = aDb + (Da)b, (a, b \in A)$$

를 만족하는 선형사상 D를 의미한다. 70년대와 80년대에 Derivation의 연속성 문제가 많이 연구되었다. 1994년 Mathieu[21]가 지적한바와 같이 많은 자연 현상들이 미분작용소로 모델화 되어져서 미분작용소의 구조와 성질에 의하여 해결되었다. 특히 미분작용소의 연속성 문제는 $C^\infty[0,1]$이 바나하 공간이 될 수 없음을 밝히는데 응용되는 등 바나하 대수의 구조를 밝히는데 응용되었다[1]. 그러나 자연현상을 모델화하는데 있어서 미분작용소보다도 미분작용소의 섭동된 형태가 더 많이 기술될 수 있다. T가 미분작용소의 섭동된 형태라고 하는것은 근사 미분작용소(Approximate Derivation)를 말하며 이것은

$$\| T(ab) - a(Tb) - (ta)b \| \leq \varepsilon \| a \| \| b \|, \ (a,b) \in A$$

을 만족하는 선형사상 T를 의미한다. 또한 $\| T - D \| \leq C(\varepsilon)$을 만족하는 Derivation D가 존재할 때 우리는 안전성을 갖는다고 말한다. (여기서 $\varepsilon \to 0$이면 $C(\varepsilon) \to 0$).

이것은 근사 미분작용소로 기술되는 자연현상을 미분작용소로 해결할 수 있음을 의미한다. 우리[16]는 Semisimple Banach Algebra 상에서 정의되는 근사 미분작용소가 연속이 됨을 보였고 부분적인 안전성 문제를 연구 하였다. 다른 여러 작용소도 연속성 및 안전성 문제가 유사하게 해결되리라 생각된다.

REFERENCES

[1] F. F. Bonsall and J. Duncan, Complete normed algebras, Springer-Verlang, Berlin.(1973).
[2] G. L Forti, Hyers-Ulam stability of function equaation in several variabley
[3] Z. Gajda, On stability of the Caychy equations on semigroups , A equationes Math. 36 (1988) 76-79.
[4] P. Gavruta, A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings, J. of Math. Analysis and app. 184 (1994) 431-436.
[5] D. H. Hyers, On the Staility of the linear functional equation, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A 27 (1941) 222-224.
[6] D. H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias, "Stability of functional Eqyations in Seberal Variables", Birkh user, 1988.
[7] K. Horosz, Perturbations of Banach algebra, Springer-Verlag, Berlin, (1980)
[8] B. Z. Johnson, Approximately multiplicative functionals, J. London Math. Soc. (2) 34 (1986) 489-510
[9] B. Z. Johnson, Continuity of generalized homomorphisms, Bull London Math. Soc. 19 (1887) 67-71.
[10] B. Z. johnson, Approximately mulitplicative maps between Banach algebras, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988) 294-316.
[11] K. W. Jun D. S. Shin and B. D. Kim, On the Hyers-Ulam-Rassoas Stability of the Pexider Equation, J. Math. Anal. Appl., to appear.
[12] Kil. Woung Jun and Young Wham Lee, "Isomeries between vector valued function subspacesm Bull. of the Institate of Math. Sinica, 24 (2) (1966) 121-126
[13] Kil. Woung Jun, Gwang Hui Kim and Young Whan Lee, The stability of generalized Beta functional equations, Aequationes Math. to appear.
[14] S.-M. Jung, Hyers-Ulam-Rassias stability of Jensen's equation and its application, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 3137-3143
[15] S.-M. Jung, On the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings, J. Math. Anal. Appl. 204 (1996), 221-226
[16] Young Wham Lee, "Stability of derivations on Banach algebras", Bull of the institute of Mara. Sinica to appear
[17] Young Wham Lee, and Gwanf Hui Kim, "Approximate jordan mappings on noncommutative Banach algebras, comm. Korean. Math. Soc. 12 (1997) 69-73
[18] Y. H. Lee and K. W. Jun, On the stability of Approximately Additive Mappings, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.
[19] Y. H. Lee and K. W. Jun, A Generalization of the Hyers-Ulam-Rassias Stability of Jensen's Equation, J. Math. Anal. Appl., to appear.
[20] M. Mathieu, Where to find the image of a derivation, Functional Analysis and Operator theory Banach Center Pub. 30. Polish Academy Science (1994) 237-249.
[21] Th. M. Rassias, On the Stability of the linear mapping in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc 72 (1978) 297-305.
[22] S. M. Ulam, "Prroblems in Modern Mathematics", Chap. VI, Science eds., Wiley, Newyork, 1960.

대전시 동구 용운동 대전대학교, 기초과학부 수학전공교수
E-mail address: `ywlee@dragon.taejon.ac.kr`