Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 2, December 1999, Pages 177–180

소환과 바나하 대수상의 데리베이션의 치역에 대한 연구동향

김 병 도

ABSTRACT. 1955년에 I. M. Singer and J. Wermer는 가환 바나하 대수상의 모든 연속인 데리베이션의 치역은 그것의 래디컬에 포함되는 것을 증명하였고 그리고 나서 그들은 "이 결과가 데리베이션이 불연속일 때에도 성립한다"를 예상문제로 제기하였다. 이 연구 흐름에 대한 최근의 동향을 살펴 보았다.

1.간략한 역사

자동 연속성이론의 주요 과제중의 하나인 다음 문제 즉"바나하 대수 A상의 모든 데리베이션의 치역은 어떤 조건하에서 A의 (제이콥슨) 래디컬에 포함되는가?"를 밝히는 문제로써 데리베이션의 연속(=유계) 또는 불연속(=비유계)일 때에 그리고 바나하 대수A에 위상적, 대수적 구조 및 성질들 중 적당한 조건들을 부여함으로써 문제를 해결하는 것이 주된 연구이다. 이러한 연구는 데리베이션 또는 선형 조르단 데리베이션의 특성이나 바나하 대수의 위상적, 대수적 구조를 밝히는데 기여하고 있다. 여기서는 이 분야 연구의 흐름을 간략히 살펴 보고자 한다.
이 문제의 동기는 다음에서 출발한다고 생각되는데 1955년에 I. M. Singer and J. Wermer [31]는 가환 바나하 대수상의 모든 연속인 데리베이션의 치역은 그것의 래디컬에 포함되는 것을 증명하였고 그리고 나서 그들은 "이 결과가 데리베이션이 불연속일 때에도 성립한다"를 예상문제로 제기하였다.
우선 Kleinecke[19]와 Shirokov[28]에 의해서 독립적으로 증명된 바나하 대수이론의 또 하나의 고전적 정리를 살펴보자. 이정리는 a, b가 $[a,[a,b]] = 0$을 만족시키는 바나하 대수 A의 원소라 하면 $[a,b]$는 quasinilpotent이다, 여기서 $[u,v] = uv - vu$이다. Kleinecke의 증명으로부터 다음의 결과에 쉽게 적용될 수 있다: D는 바나하 대수 A상의 연속인 데리베이션이라 놓자. 이때 a가 $D^2(a) = 0$를 만족시키면 $D(a)$는 quasinipotent이다. 이 결과는 I.M. Singer 및 J. Wermer의 정리를 일반화하는 다음의 결과에 적용될 수 있다는 것을 Kaplansky가 보여 주었다. D는 바나하 대수 A 상의 연속인 데리베이션이라 놓자. 이때 a가 $[D(a), a] = 0$를 만족시키면 $D(a)$는 quasinipotent이다. 1970년에 A.M. Sinclair [30] 는 바나하 대수상의 모든 연속인 선형 조르단 데리베이션이 원시 아이디얼들을 불변이 되게 하는 것을 보였다. 그리고 가환인 반단순 바나하 대수상의 유일한 선형 데리베이션은 0뿐임을 보였다. 이 결과들을 결합하면 가환인 바나하 대수 A상의 모든 연속인 선형 조르단 데리베이션의 치역은 A의 (제이콥슨) 래디컬에 포함된다는 결론을 얻게 된다.
1978년에 Ptak[25]는 D가 바나하 대수 A 상의 유계(=연속)인 데리베이션이라 놓자. a는 A의 정해진 원소라 하자. 만일 함수 $\lambda \to |a - \exp(\lambda D(a))|_\sigma$가 유계이면 그 것은 0 함수이다(여기서 $|x|_\sigma$는 x의 spectral 반경이다). 그는 이결과의 직접적인 결과로서 고전적 I.M. Singer and J. Wermer 정리를 얻었는데 다음과 같다: A가 가환인 바나하 대수라 하자. 그리고 D는 A상의 유계인 데리베이션이라 놓자.그러면 D는

1991 *Mathematics Subject Classification.* 46H20, 16W25, 4B47, 16W20, 16N60.
Key words and phrases. DERIVATION, JORDAN DERIVATION, BANACH ALGEBRA.

A를 rad(A)로 사상한다. 또한 많은 학자들이 I.M. Singer and J. Wermer 정리를 비가환인 바나하 대수로 확장하는 많은 논문들을 발표하였다. 그 중에서 1984년에 B. Yood[38]는 A가 바나하 대수라 할 때 모든 $x, y \in A$에 대하여 $[D(x), y] \in$ rad(A)를 만족시키는 바나하 대수상에서의 연속인 데리베이션 D 의 치역은 A의 래디컬에 포함된다는 것을 보여 주었다.

그러나 많은 수학자들의 계속되는 연구에도 불구하고 1955년에 제기한 I. M. Singer and J. Wermer의 예상을 해결하지는 못하였다.

그런데 드디어 1988년에 M.P. Thomas[32]는 Singer와 Wermer의 예상인 다음 정리 즉, 가환인 바나하 대수상의 데리베이션의 치역은 A의 래디컬에 포함된다는 것을 증명하여 34년만에 그들의 예상을 긍정적으로 해결하였다.

1990년에 J. Vukman[33]은 B. Yood의 결과를 다음과 같이 일반화 하였다. D는 바나하 대수 A 상의 연속인 데리베이션이라 놓자. 만일 모든 $x \in A$에 대하여 $[D(x), x] \in$ rad(A)를 만족시키면 $D(A) \subseteq$ rad(A)이다.

그 이후 1991년에 B.D. Kim 및 K.W. Jun[16]은 간단한 방법에 의하여 M.P. Thomas의 결과를 약간 일반화하였다:

A가 모든 $x, y, z \in A$에 대하여 $x(yz - zy) = (yz - zy)x$를 만족시키는 바나하대수라 놓자. 만일 $D : A \to A$가 데리베이션이면 $D(A)$가 $Q(A)$에 포함된다(여기서 $Q(A)$는 A의 모든 quasinilpotent인 원소들의 집합을 나타낸다).

1991년에 J. Vukman[34]은 A가 비가환 반단순 바나하 대수라 하자. 그리고 $D : A \to A$가 모든 $x \in A$에 대하여 $[D(x), x]D(x) = 0$를 만족시키는 선형 데리베이션이라 하자. 이경우에 $D = 0$임을 보였다. 그리고 1991년에 M. Mathieu와 G.J. Murphy[21]는 바나하 대수상에서의 모든 유계인 centralizing 데리베이션의 치역은 그 바나하 대수의 래디컬에 포함되는 것을 보였다. 그리고 위와 같은 논문에서 그들은 바나하 대수상에서의 모든 유계인 데리베이션이 $D(A) \subseteq$ rad(A)이면 $D(A) \subseteq$ rad(A)임을 밝혔다. 1979년에 Ptak[26]의 또 하나의 결과는 inner 데리베이션에서 임의의 유계인 데리베이션으로 다음과 같이 확장된다: D가 어떤 양수 M과 모든 $a \in A$에 대하여 부등식 $r(D(a)) \leq Mr(a)$가 성립하는 바나하 대수 A상에서의 유계인 데리베이션이라 놓자. 그러면 $D^2(A) \subseteq Q(A)$이다. 또한 1992년에 M. Mathieu와 V. Runde [22]가 데리베이션의 유계조건을 없앴을 경우 즉 복소 바나하 대수상에서의 모든 centralizing 데리베이션의 치역은 그 바나하 대수의 래디컬에 포함되는 것을 증명하였는데 그 들은 1988년의 M.P. Thomas의 결과를 일반화한 이 결과를 증명하는데 있어서 소환이론을 이용함으로써 증명을 매우 간략하게 하였고 소환 또는 준소환이론을 이용하여 연구하는 길을 열었다고 본다. 그리고 또한 그들은 같은 논문에서 다음 세가지의 명제가 서로 동치임을 밝혔다:

(a) 바나하 대수상에서의 모든 데리베이션이 nilpotent 분리 공간을 가진다.

(b) 준소 바나하 대수상에서의 모든 데리베이션이 연속이다.

(c) 소 바나하 대수상에서의 모든 데리베이션이 연속이다.

1992년에 M. Brešar 와 J. Vukman[8]은 다음을 증명하였다:

D와 G는 모든 $x \in A$에 대하여 $[D^2(x) + G(x), x] \in$ rad(A)를 만족시키는 바나하 대수 A 상의 연속인 데리베이션이라 놓자. 그러면 D와 G는 A에서 rad(A)로 사상한다.

위와 같은 논문에서 M. Brešar 와 J. Vukman [8]은 다음이 성립함을 보였다:

D가 바나하 대수 A 상의 연속인 데리베이션이라 놓자. 만일, 모든 $x \in A$에 대하여 $[D(x), x]^2 \in$ rad(A)이면 D는 A에서 rad(A)로 사상한다.

1992년에 J. Vukman[35]은 다음을 증명하였다:

A가 비가환인 바나하 대수라 놓자. 그리고 $D : A \to A$가 연속인 선형 조르단 데리베이션이라 놓자. 만일 모든 $x \in A$에 대하여 $[[D(x), x], x],$
$x] \in$ rad(A)이면 D는 A에서 rad(A)로 사상한다.

1992년에 J. Vukman[34]은 다음을 증명하였다: A가 복소수체 $\mathbb{C}$위의 바나하 대수라 놓자. 그리고 어떤 α에 대하여 $\alpha D^3 + D^2$이 데리베이션인 $D : A \to A$ 연속인 데리

베이션이 존재한다고 가정하자. 이 경우에 D는 A에서 $\mathrm{rad}(A)$로 사상한다.

한편 A가 unital 바나하 대수인 경우를 살펴보면 다음과 같다:
1991년에 M. Brešar[4]는 다음이 성립함을 밝혔다: A가 unital인 바나하 대수라 하자. 그리고 D가 준소 바나하 대수 A의 centralizing 데리베이션이라 놓자. 그러면 D는 A에서 $Z(A) \cap \mathrm{rad}(A)$로 사상한다(여기서 $Z(A)$는 A의 center이다).
1993년에 M. Brešar[6]는 다음이 성립함을 보여 주었다: A가 unital 인 바나하 대수라 하자. 그리고 D는 A상에서의 inner 데리베이션이라 놓자. 어떤 양수 M과 모든 $a \in A$에 대하여 부등식 $r(D(x)) \leq Mr(x)$가 성립한다고 가정하자. 그러면 D는 A를 $\mathrm{rad}(A)$로 사상한다.
1993년에 V. Runde[27]는 다음이 성립함을 보여 주었다:
지금 $n \in \mathbb{N}$, 그리고 $\mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$는 n commuting 변수의 다항식 대수 즉 n개의 생성자를 갖는 자유복소 대수를 나타낸다. $n \in \mathbb{N}$라 놓자. 그리고 $p \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$가 다음 성질을 갖는다:
(a) 만일 D가 모든 $a \in A$에 대하여 $p(a, Da, \ldots, D^n a) = 0$인 소 바나하 대수 A상의 데리베이션이라 하면 $D = 0$ 또는 A는 가환이다. 그러면

$$p(a, Da, \ldots, D^n a) \in \mathrm{nil}(A) \quad (a \in A)$$

인 바나하 대수 A상의 모든 데리베이션은 $\mathrm{rad}(A)$로 사상한다.
그리고 그의 또 하나의 결과는 다음과 같다:
A가 바나하 대수라 하자. 그리고 $D : A \to A$는 데리베이션이라 놓고 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $[a, D^n(a)] = 0$인 $a \in A$라 하자. 그러면 $D(a)$는 quasinilpotent이다.

2.최근의 연구 동향

1995년에 M. Brešar와 M.Mathieu[7]는 다음의 결과를 증명하였다: A가 unital인 바나하 대수상에서의 모든 spectrally 유계인 데리베이션 D는 A에서 $\mathrm{rad}(A)$로 사상한다.
그리고 더나아가서 D가 unital인 바나하 대수상에서의 데리베이션이라 하자. 그러면 $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$일 필요충분 조건은 $\sup\{r(z^{-1}D(z))|z \in A \quad \text{invertible}\} < \infty$임을 밝혔다.
1998년에 B.D.Kim[18]는 다음이 성립함을 보였다. A가 단위원 1과 rad
(A)를 갖는 비가환인 바나하 대수라 놓자. 그리고 $D : A \to A$가 선형 조르단 데리베이션이라 놓자. 모든 $x, y, z \in A$에 대하여

$$u - v = \lambda 1, \; x(u+v)y - y(u+v)x = 0, \; [xu, zv]y - y[vx, uz] = 0$$

를 만족시키는 $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ 그리고 원소 $u, v \in A$가 존재한다고 가정하자. 그러면 $D(A) \subseteq Q(A)$이다.
그리고 이 이외에도 소환 및 준소환 이론에서의 결과들을 적용시키면 많은 결과들을 얻을 수 있다. 예를 들면 국내에서도 여러 결과들이 현재까지 얻어져 왔고 국외의 경우는 C. Lance, M. Bresar, S.L. Jer and J. Vukman, T.K. Lee, T.L. Wong 등의 소환 또는 준소환 이론의 결과 들은 J. Vukman[35]의 정리와 증명을 모방함으로써 바나하 대수상에서의 데리베이션의 문제로 바꾸어서 해석학적 결과를 유도 할 수 있다. 최근에 이 분야의 결과들이 조르단 데리베이션의 primitive ideal의 상을 불변이 되게 하는 조건이 연속이어야 하고 또한 일반화된 데리베이션의 primitive ideal을 불변이 되게 하기 위해서는 spectrally 유계여야 하는 이러한 제약 때문에 연구 결과들이 많지는 않은 것으로 생각되며 앞으로 더욱 이 제약들을 극복하고 소환이론이나 준소환 이론에서 지금까지의 결과를 바탕으로 보다 진전된 내용을 연구하여 미해결 문제들을 해결해 나가야할 것으로 본다.

REFERENCES

[1] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1973.
[2] M. Brešar, *Jordan derivations on semiprime rings*, Proc. Amer. Math. Soc., **104**(1988), 1003-1006.
[3] M. Brešar, *A note on derivations*, Math.J.Okayama Univ. **32**(1990), 83-88.
[4] M. Brešar , *Centralizing mappings on von Neumann algebras* , Proc. Amer. Math. Soc. **111**(1991), 501-510.
[5] M. Brešar , *On generalization of notion of centralizing mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **114**(1992), 641-649.
[6] M. Brešar, *Derivations decreasing the spectral radius*, Arch. Math. **61**(1993), 160-162.
[7] M. Brešar and M. Mathieu, *Derivations mapping into the radical,III*, J. Funct. Anal. Vol. **133**, 1995, 21-29.
[8] M. Brešar and J. Vukman, *Derivations of noncommutative Banach algebras*, Arch. Math. Vol. **59**, 1992, 363-370.
[9] L. O. Chung and J. Luh, *Semiprime rings with nilpotent derivations*, Canad. Math. Bull. **24(4)**(1981), 415-421.
[10] J. Cusack, *Jordan derivations on rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **53**(1975), 321-324.
[11] Q. Deng and H.E. Bell, *On derivations and commutativity in semiprime rings*, Comm. in algebras. **23**(10),1995, 3705-3713.
[12] I.N. Herstein, *Jordan derivations on prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **8**(1957), 1104-1110.
[13] I.N. Herstein, *Topics in ring theory*, University of Chicago Press, Chicago, London. 1969
[14] B. E. Johnson and A. M. Sinclair, *Continuity of derivations and a problem of Kaplansky*, Amer. J. Math.**90**(1968), 1067-1073.
[15] B. E. Johnson, *Continuity of derivations on commutative Banach algebras*, Amer. J. Math. **91**(1969), 1-10.
[16] B.D. Kim, *The range of derivations on non-commutative Banach algebras*, Bull. Korean Math. Soc. **28**(1),1991,65-68.
[17] B.D. Kim, *Derivations of prime rings and Banach algebras*, Kangwon-Kyungki Math. J., **3**(1),1995, 93-97.
[18] B.D. Kim, *The image of derivations on certain Banach algebras*, Comm. Korean Math. Soc. **13**(3),1998,489-499.
[19] D.C. Kleinecke, *On operator commuatators*, Proc. Amer. Math. Soc. **8**(1957), 535-536.
[20] P.H. Lee and T.K. Lee, *Note on nilpotent derivations* , Proc. Amer. Math. Soc. **98**(1986), 31-32.
[21] M. Mathieu and G.J. Murphy, *Derivations mapping into the radical*, Arch. Math. **57**(1991), 469-474.
[22] M. Mathieu and V. Runde, *Derivations mapping into the radical II*, Bull. London. Math. Soc. **24**(1992), 485-487.
[[23] M. Mathieu, *Posner's second theorem deduced from first*, Proc. Amer. Math. Soc. **114**(1992), 601-602.
[24] E. Posner, *Derivations in prime rings*, Proc. Amer. Math. **8**(1957), 1093-1100.
[25] V. Pt̆ak, *Derivations, commutators and radical*, Manuscripta Math. **23**(1978), 355-362.
[26] V. Pt̆ak, *Commutators in Banach algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **22**(1979), 207-211.
[27] V. Runde, *Range inclusion results for derivations on noncommutative Banach algebras*, Studia Math. **105**(2),1993, 159-172.
[28] F.V. Shirokov, *Proof of a conjecture of Kaplansky*, Uspekhi. Mat. Nauk. **11**(1956), 167-168.
[29] A.M. Sinclair, *Continuous derivations on Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **20**(1969), 166-170.
[30] A.M. Sinclair , *Jordan homomorphisms and derivations on semisimple Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **24**(1970),209-214.
[31] I. M. Singer and J. Wermer, *Derivations on commutative normed algebras*, Math. Ann. **129**,1955, 260-264.
[32] M.P. Thomas, *The image of a derivation is contained in the radical*, Ann. of Math. **128**(1988), 435-460.
[33] J. Vukman , *Commuting and centralizing mappings in prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **109**(1990), 47-52.
[34] J. Vukman, *A result concerning derivations in noncommutative Banach algebras*, Glasnik. Mat. **26** (1991), 83-88.
[35] J. Vukman, *On derivations in prime rings and Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **116**(1992), 877-884.
[36] J. Vukman, *A result concerning derivations in Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **116**(1992), 971-975.
[37] J. Vukman , *Derivations in semi-prime rings*, Bull. Austral. Math. Soc.**53**(1995), 353-359.
[38] B. Yood, *Continuous homomorphisms and derivations on Banach algebras*, Contemp. Math. **32**(1984), 279-284.

210-702 강원도 강릉시 지변동 산1 강릉대학교 자연과학대학 수학과
E-mail address: bdkim@knusun.kangnung.ac.kr