Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 2, December 1999, Pages 178–181

HODGE 이론에 관하여

김 성 옥

ABSTRACT. 대수다양체의 연구에 중요한 역할을 하는 Hodge 이론의 문제, 방법, 결과들을 간략하게 살펴본다.

1. 개관

모든 개념은 복소수체 위에서 정의된 것으로 한다. Hodge 이론은 Abel의 정리, Jacobi inversion 정리 등을 필두로 하는 매끈한 대수곡선 위의 abelian 적분이론에서부터 Picard, Poincaré, Lefschetz, Hodge([15])에 의해 집대성된 고전적 이론 및 특이점이 있는 대수다양체 혹은 대수다양체의 모임(family)등으로 확장된 방대한 이론이다. 여기에 등장하는 중요한 문제중 하나는 대수기하학의 중요한 문제라고도 할 수 있는 Hodge conjecture이다. 2절에서는 Hodge conjecture를 간략히 살펴보고 3절에서 Hodge structure를 소개하며 4절에서는 Hodge 이론적 무한소방법(infinitesimal method)을 사용하는 예를 살펴보기로 한다. Griffiths 와 Harris 의 책 ([14])은 Hodge theory를 시작하는데 필요한 모든 것을 잘 갖추고 있는 명저라 하겠다. 대수곡선 위의 이론에 대해서는 [1]이 좋은 참고서적이라 하겠다.

2. HODGE CONJECTURE

M을 사영공간 속의 n 차원 정칙(nonsingular) 대수다양체라 하자. M위의 k차원 analytic subvariety (Chow의 정리에 의해 algebraic subvariety가 됨) 의 fundamental class의 Poincare dual을 취하면 이 것은 type $(n-k, n-k)$인 rational cohomology class가 된다. Hodge conjecture는 이것의 역이 성립할 것이라는 것이다.

Hodge conjecture: M의 type $(n-k, n-k)$인 rational cohomology class는 해석적이다. 즉, M 의 analytic subvariety들의 fundamental class들의 Poincare dual을 취한 것들의 유리수체 위에서의 일차결합이다.

(1) Lefschetz (1,1) 정리와 hard Lefschetz 정리에 의해 $k = 1$인 경우와 $k = n - 1$인 경우에 conjecture가 참이됨이 알려져 있다. ([14])

(2) 여러 형태의 abelian 다양체 위에서 참이 됨이 알려져 있다. ([20]) Gordon은 비교적 최근의 결과들도 포함하여 이에 대해 [7]에 잘 조사해 놓았다. van Geemen([6])의 논문도 우수한 참고 자료이다.

(3) M이 사영공간의 초곡면(hypersurface)인 몇몇 경우에도 참이 된다.(참조 [20]) Griffiths([13])와 Zucker([21], [22])는 normal function을 이용하여 Hodge conjecture를 증명하고자 하였다. M이 $\mathbf{P}^5$의 cubic 4-fold인 경우에 참이 됨을 보였으며 그 들의 방법은 꾸준히 연구 발전되어 왔다. Green과 Müller-Stach([11] 참조)에 의해 증명된 Abel-Jacobi map의 image에 관한 결과로 normal function을 이용하여 Hodge conjecture의 일반적인 경우를 해결할 수 있는 가능성이 더욱 높아졌다고 하겠다. Normal

function에 관해서는[13] 혹은 [2], Abel-Jacobi map에 관해서는 [12]와 [10]에 잘 설명되어 있다.

3. HODGE STRUCTURE

매끄러운 대수곡선 C 위에서의 Hodge structure는 그 곡선의 Jacobian variety라 불리는 abelian variety이며 Torelli의 정리에 의해 theta divisor와 함께 곡선을 특성화하는 것으로 잘 알려져 있다.(참조 [1], [14]) 고차원의 정칙 사영다양체 M위에도 M의 cohomology의 Hodge decomposition으로부터 자연스런 Hodge structure 가 정의된다. 대수곡선의 theta divisor처럼 기하적 의미를 보여줄 수 있는 것을 고차원에 도입하고자 Griffiths(참조 [2]) 등에 의해 infinitesimal variations of Hodge structure가 소개되고 Torelli type 정리(참조 [3], [5])들이 등장하였다. 일반적인 Hodge Structure 는 다음과 같이 정의된다.

정의 1. Hodge structure of weight n 은 $\{V, \Lambda, F^p\}$로 표시되며, 실벡터공간 V와 그 안의 한 lattice Λ 와 $V_{\mathbf{C}}(= V \bigotimes \mathbf{C})$ 의 다음 조건을 만족하는 decreasing filtration F^p들로 이루어진다:

$$(i)\ F^0 = V_{\mathbf{C}} \supseteq F^1 \supseteq \cdots \supseteq F^{n+1} = 0$$

$$(ii)\ V_{\mathbf{C}} = F^p \oplus \overline{F^{n-p+1}}, p = 0, \ldots, n$$

위 두 조건을 만족하는 F^p들을 Hodge filtration이라 부른다.

정칙 사영다양체(혹은 compact Kähler manifold) M 위에서 $V = H^n(M, \mathbf{R})$, $\Lambda = H^n(M, \mathbf{Z})$, $F^p = \bigoplus_{k \geq p} H^{k,n-k}(M)$은 Hodge structure of weight n을 이루게 됨을 쉽게 볼 수 있다. 여기서 $H^{p,q}(M) = H^q(M, \Omega^p_M)$이고 $H^n(M, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$ 은 M의 n-th cohomology의 Hodge decomposition을 의미한다(Ω^p_M 는 sheaf of germs of holomorphic p-forms on M이다).

Hodge decomposition은 Kähler metric의 선택에 영향을 받지 않음이 알려져 있으며 모든 Hodge structure가 다 compact Kähler manifold들로 부터 생겨나는 것도 아니다. Hodge structure of weight ≥ 2 인 것중 어떤 것이 compact Kähler manifold의 Hodge structure가 되는지의 여부는 아직 완전히 해결되지않은 문제중 하나이다.

정칙이 아닌 특이점(singularity)이 있는 경우에는 Deligne에 의해 소개된 mixed Hodge structure를 생각할 수 있으며 이것에 관해서는 [4], [19]에 잘 소개되고 있다.

4. 무한소 방법

정칙 대수다양체가 complete intersection처럼 Hodge group ($H^{p,q}(M)$) 들을 대수적으로 표현할 수 있는 경우 대수적 방법으로 Hodge 이론적 결과를 얻을 수 있다. 그 예로서 다음 정리의 Green([8]) 의 증명을 살펴보고자 한다

정리 1. **(The explicit Noether-Lefschetz theorem)** $NL_d = \{F \in \mathbf{P}(H^0(\mathbf{P}^3, O_{\mathbf{P}^3}(d))) \mid S = \{F = 0\} \subseteq \mathbf{P}^3, Pic(S) \neq \mathbf{Z}\}$라 두고 Σ를 NL_d의 한 기약성분(irreducible component)이라하면 $d \geq 4$ 일 때 Σ의 $\mathbf{P}(H^0(\mathbf{P}^3, O_{\mathbf{P}^3}(d))$에서의 여차원은 $d-3$ 이상이다.

$\mathbf{P}^3$ 속의 대개의 매끈한 대수곡면들 위에 있는 대수곡선은 반드시 그 곡면과 다른 곡면의 complete intersection으로 표현될 수 있다고 하는 것이 원래 Noether-Lefschetz 정리이다. (즉, 정리1에서 Σ의 여차원이 1이상이다.) 위의 정리의 증명을 살펴 보기 전에 먼저 위에서 언급한 Hodge group의 대수적 표현이란 것을 알아 보기로 한다.

정리 2. (Poincaré Residue Isomorphism) X가 $\mathbf{P}^n$의 매끄러운 초곡면으로서 d차 동차 다항식 F에 의해 정의된다고 하면

$$H^{n-k-1,k}(X) \simeq \frac{H^0(\mathbf{P}^n, O_{\mathbf{P}^n}(d(k+1)-n-1))}{J_{d(k+1)-n-1}}$$

이다. 여기서 J_m은 $\frac{\partial F}{\partial z_0}, \frac{\partial F}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_n}$ 에 의해 생성된 m 차인 Jacobi ideal을 의미하며 $z_0, z_1, \ldots, z_n$ 은 $\mathbf{P}^n$의 homogeneous coordinates이다. $H^0(\mathbf{P}^n, O_{\mathbf{P}^n}(m))$ 의 원소들이 m차 동차다항식들임을 상기한다.

이 정리의 증명은 [3]에 잘 소개되고 있으며 complete intersection의 경우는 [16]에 계산이 되어 있다.

정리1의 증명의 개략을 알아보기로 한다.

S를 $\mathbf{P}^3$ 속의 한 매끄러운 곡면이라하고 $H^{p,q}(S) = H^q(S, \Omega_S^p)$로서 앞에서 처럼 S의 type (p,q) cohomology를 의미한다. S의 hyperplane bundle $O_S(1)$의 first Chern class를 $\omega(=c_1(O_S(1)))$ 라 두자. $H_{pr}^{1,1}(S)$는 S의 primitive $(1,1)$-cohomology로서 $H^{1,1}(S)$의 원소중 ω와 수직인(orthogonal) 원소들로 이루어진 $H^{1,1}(S)$의 subgroup이다.

Lefschetz (1,1) 정리에 의해 S위의 대수곡선들과 S의 integral (1,1)-class 들과는 일대일 대응관계가 있다고 할 수 있다. 즉, S의 Picard group 이 $Pic(S) \simeq H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbf{Z})$ 을 만족한다.

S위의 한 대수곡선 C가 S와 어떤 다른 대수곡면과의 complete intersection이 아니라면, $c_1(O_S(C))$는 $H_{pr}^{1,1}(S)$의 원소로서 ω와는 다른 또 하나의 $Pic(S)$의 생성원소가 된다.

$\lambda = c_1(O_S(C))$을 extension class로 하는, tangent sheaf Θ_S의 O_S 에 의한 extension P가 다음 exact sequence에 의해 정의된다.

$$0 \to \Omega_S^1 \otimes O_S(C) \to P \to O_S(C) \to 0$$

이로부터 얻어지는 사상$f : H^1(S, \Theta_S) \to H^2(S, O_S)$ 는 $\lambda = c_1(O_S(C))$ 을 cup product 하는 것이다. S를 $H^1(S, \Theta_S)$ 의 한 원소 η 방향으로 무한소 변형을 시켰을 때 λ가 type (1,1)인 채로 남아있다는 것은 $H^2(S, O_S)$속에서 0이 된다는 것과 마찬가지이다. (λ 가 integral, 그래서 real class이기 때문이다.) 그러한 η 들의 모임을 T로 두자.

$$H^1(S, \Theta_S) \otimes H_{pr}^{1,1}(S) \to H^2(S, O_S)$$

을 dualize하여

$$f^* : H^1(S, \Theta_S) \otimes H^{2,0}(S) \to H_{pr}^{1,1}(S)^* \simeq H_{pr}^{1,1}(S)$$

를 얻었을 때 $T \otimes H^{2,0}(S)$ 는 $(\lambda)^{\perp}$ 에 속하여 f^* 가 전사(surjective)가 아님을 알 수 있다.

이 때, $H^1(S, \Theta_S) \simeq \frac{H^0(\mathbf{P}^3, O_{\mathbf{P}^3}(d))}{J_d}$ ([16] 참조)와 위의 정리를 이용하면 f^* 는

$$\frac{H^0(\mathbf{P}^3, O_{\mathbf{P}^3}(d))}{J_d} \otimes H^0(\mathbf{P}^3, O_{\mathbf{P}^3}(d-4)) \to \frac{H^0(\mathbf{P}^3, O_{\mathbf{P}^3}(2d-4))}{J_{2d-4}}$$

로서 다항식을 곱하는 사상으로 표현되어진다. 여기서부터 Σ의 여차원이 $\geq d-3$임을 대수적인 방법으로 보일 수 있을 것임은 짐작할 만 할 것이다. 나머지 자세한 증명은 [8] 혹은 [11]을 참조할 것을 추천한다.

위와 같은 Hode group의 대수적 표현은 complete intersection surface의 Noether-Lefschetz 정리([16]), Generic Torelli Theorem for Projective Hypersurfaces([5])등의 증명에도 사용되어 그 효력을 과시한 것을 볼 수 있다. (참조 [9].)

REFERENCES

[1] E.Arbarello, M.Cornalba, P. Griffiths, and J.Harris, *Geometriy of algebraic curves.I,* Springer-Verlag, Berlin 1985

[2] J. Carlson, M.Green, P.Griffiths, and J.Harris, *Infinitesimal variation of Hodge structure I,* Compositio Math. 50 (1983), 109-205

[3] J. Carlson and P. Griffiths, *Infinitesimal variation of Hodge structure and the global Torelli problem,* J. Geometrie Algebrique d'Angers, Sijthoff and Noordhoff, (1980), 51-76

[4] P. Deligne, *Theorie de Hodge. II,* Inst. Hautes Études Sci.Publ.Math. 40 (1971), 5-58

[5] R. Donagi, *Generic Torelli for projective hypersurfaces,* Compositio Math. 50 (1983), 325-353

[6] B. van Geemen, *Kuga-Satake varieties and the Hodge conjecture,* Duke preprint alg-geom 9903146, 1999

[7] B. Gordon, *A survey of the hodge conjecture for Abelian Varieties,* Duke preprint alg-geom 9709030, 1997

[8] M. Green, *A new proof of the explicit Noether-Lefschetz theorem,* J. Differential Geom. 27 (1988), 155-159

[9] M. Green, *Components of maximal dimension in the Noether-Lefschetz locus,* J. Differential Geom. 29 (1989), 295-302

[10] M. Green, *Griffiths' infinitesimal invariant and the Abel-jacobi map,* J. Differential Geom. 29 (1989), 545-555

[11] M. Green, *Infinitesimal methods in Hodge theory,* C.I.M.E. lecture notes, 1993

[12] P.Griffiths, *On the periods of certain rational integrals. I and II,* Ann. Math. (1969),460-541

[13] P.Griffiths, *A theorem concern the differential equations satisfied by normal functions associated to algebraic cycles,* Amer.J. Math.101 (1979), 94-131

[14] P.Griffiths, and J.Harris, *Principles of algebraic geometry,* Wiley-Interscience, New York (1978)

[15] W.Hodge, *The theory and applications of Harmonic Integrals,* Cambridge University Press, 1941

[16] S. Kim, *Noether-Lefschetz locus for surfaces,* Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), 369-384

[17] S. Lefschetz, *On certain numerical invariants of algebraic varieties,* Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921), 326-363

[18] A. Lopez, *Hodge theory on the Fermat surface and the Picard number of a general surface in* $\mathbf{P}^3$ *containing a plane curve,* Sezione Scientifica, Bollettino U.M.I. (1993),1-22

[19] Y. Shimizu, *Mixed Hodge structures on comologies with coefficients in a polarized variation of Hodge structure,* Advanced Studies in Pure mathematics 10, Kinokunia, Tokyo (1987), 695-716

[20] T. Shioda, *What is known about the Hodge Conjecture?* Advanced Studies in Pure mathematics 1, Kinokunia, Tokyo (1983), 55-68

[21] S. Zucker, *Generalized intermediate Jacobians and the theorem on normal functions,* Inv. Math. 33 (1976), 185-222

[22] S. Zucker, *The Hodge conjecture for cubic fourfolds,* Compositio Math. 34 (1977), 199-209

한동대학교 기초학부 경상북도 포항시 북구 흥해읍 남송리
E-mail address: `sokim@light.han.ac.kr`