Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 1, Number 1, September 1998, Pages 222–228

TWO-DIMENSIONAL CUSP ON THE FREE SURFACE AT LOW REYNOLDS NUMBER FLOW

정 재 택

ABSTRACT. Free surface deformations and cusp formations are analyzed by considering a vortex dipole below the free surface. The direction and the strength of vortex dipole are arbitrary. The Stokes' approximation is used and surface tension effects are included, but gravity is neglected. The solution of whole flow field is obtained analytically by using complex variable technique. For some constant directions of vortex dipole, the deformations of the free surface shape are shown. The radius of curvature at converging point on the free surface becomes extremely small as capillary number grows, which means free surface shape becomes singular and a cusp forms on the free surface above some critical capillary number in a real fluid. The asymptotic form of the cusp is determined as $Y \sim cX^{2/3}$.

1. 서론

뉴우톤유체 또는 비 뉴우톤 유체 내에서 상승하는 기포의 후방 자유표면상에 발생되는 커스프(cusp) 현상이 Hassager[1,2], Coutanceau & Hajjam[3], Bhaga & Weber[4] 등에 의하여 발표된 이래로 자유표면의 변형과 커스프에 대한 이론 및 실험적 연구가 최근 많이 진행되고 있다. Liu $et al.$ [5]의 실험에 따르면, capillary 수가 작을 때는 기포 후방에 커스프가 발생하지 않으나, capillary 수가 임계값에 이르면 기포의 형상이 급격히 변화하고 축대칭이 아닌 납작한 2차원 커스프가 발생함이 관찰되었다. 이때 기포에 걸리는 유동저항이 급격히 줄게되어 기포의 상승속도는 불연속적으로 증가하는 양상을 보였다. 이와같이 자유표면상에 형성되는 2차원의 커스프는 유동의 특이점(singularity)으로서 이 커스프 주위의 유동은 유동학적으로 매우 흥미로운 현상이다. 이 커스프 주위의 유동을 다른 방법으로 실현하기 위하여 Jeong & Moffatt[6]는 뉴우톤 유체 내에서 실린더를 서로 반대 방향으로 회전시켜 자유표면의 변형을 관찰하였다. 그 결과 매우 낮은 회전 속도에서는 자유표면 상에서 정체점(stagnation point)이 생성되며 어떤 경우에 정체점 부근에서는 자유표면이 작은 봉우리를 형성함을 관찰하였다. 그러나, 실린더의 회전각속도가 어떤 임계 각속도 이상에서는 자유표면상에 육안으로 관측 되는 커스프가 형성되었다. 이와같이 자유표면에 나타나는 유동특이점인 커스프를 해석 하기 위하여 Jeong & Moffatt[6]는 문제를 이상화하고 이론적으로 해석하여 커스프의 형성과정을 규명하고자 하였다. 즉, 자유표면이 있는 유동장내에서 서로 반대 방향으로 회전하는 두 실린더를 하나의 2극 보텍스(vortex dipole)로 이상화하여 문제를 해석하였다. 여기서 2극 보텍스의 방향은 자유표면에 수직으로 향하며 2극 보텍스의 세기에 따라 자유표면의 변형을 조사하여 커스프의 형성을 고찰하였다. 본 논문에서는 위의 이상화된 문제를 보다 일반화 시켜, 2극 보텍스의 방향이 자유표면에 수직인 경우를 포함하여 임의의 방향으로 향하는 경우에 자유표면의 변형과 커스프의 형성과정에 대하여 논의한다. 해석을 위한 방정식은 유동의 레이놀즈수가 매우 낮은 경우에 사용되는 Stokes 의

1991 *Mathematics Subject Classification.* 76D07.

Key words and phrases. free surface, cusp, vortex, dipole, viscous flow, surface tension, capillary number, conformal mapping.

근사식을 사용하고 표면장력의 효과는 고려되는 반면 중력의 효과는 무시하였다. 실제로 커스프 근처에서는 특성길이것 매우 작으므로 커스프 해석에서 중력의 효과는 나타나지 않는다. 해석의 방법으로 복소해석함수 이론과 등각사상 (conformal mapping)이 사용되었다.

2. 방정식의 구성 및 경계조건

Fig.1과 같은 (x, y) 직각좌표계에서 $y < 0$인 반무한영역에 놓인 유동장에 대하여 생각하자. 복소변수 $z = x+iy$로 둘 때, 자유표면 (Γ) 으로부터의 깊이 d 인 곳$(z = -id)$에 세기 B 인 2극 보텍스것 임의의 방향(λ)을 향하여 놓여있고 이로부터 유동장이 형성되어 자유표면은 변형된다. 이 문제에서 길이 스케일은 d 것 유일하므로 d 를 단위길이 1로 놓을 수 있다.$(d = 1)$.

레이놀즈 수 $(Re = B/d)$ 것 충분히 작은 경우, 유동 지배방정식의 관성항은 점성항에 비하여 작으므로 무시되고, x와 y방향의 유동속도 성분을 각각 u, v 라 할 때

(1) $$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

로 되는 유동함수(stream function) Ψ 는 다음의 biharmonic 방정식을 만족한다.

(2) $$\bigtriangledown^4 \Psi = 0.$$

그런데, 이 biharmonic 방정식의 해 Ψ는 일반적으로 다음과 같이 2개의 복소해석함수 $f(z)$와 $g(z)$로 다음과 같이 나타낼수 있다.

(3) $$\Psi = Im[f(z) + \bar{z}g(z)]$$

여기서 $f(z)$와 $g(z)$는 2극 보텍스의 특이성을 띠는 $z = -i$ 점을 제외하고 모든 유동영역에서 해석적이다. 유동의 속도성분 u, v 도 $f(z)$와 $g(z)$로 나타내면

(4) $$u - iv = f'(z) + \bar{z}g'(z) - \overline{g(z)},$$

로 되고 유동장내의 압력 p와 와도(vorticity) ω 는 다음과 같이 표현된다.

(5) $$p - i\mu\omega = 4\mu g'(z)$$

여기서 μ는 유체의 점성계수이다. 따라서, 2개의 복소함수 $f(z)$와 $g(z)$를 구하면 유동장을 모두 해석한 것이 된다. $f(z)$와 $g(z)$를 구하기 위한 경계조건은 다음과 같이 된다.
1) 자유표면상에서 $(Z \in \Gamma)$

①속도 경계조건 : 자유표면에서의 유속은 항상 자유표면에 접하므로 식(4)로부터

$$f'(z) + \bar{z}g'(z) - \overline{g(z)} = u_0(z)\overline{(\frac{dz}{ds})}. \tag{6}$$

여기서 $u_0(z)$ 는 자유표면상의 접선방향 유동속도로 아직 미지함수이다.
②응력 경계조건 : 자유표면에 수직방향의 응력은 표면장력과 평형을 이루는데 이 조건을 식(4)와 (5)를 이용하여 유도하면[7]

$$f'(z) + \bar{z}g'(z) + \overline{g(z)} = -i\frac{\gamma}{2\mu}\overline{(\frac{dz}{ds})} \tag{7}$$

로 된다. 여기서, γ 는 유체의 표면장력계수이다. 또한, 식(6)과 (7)을 결합하여 다른 형태로 나타내 보면 다음과 같다.

$$f(z) + \bar{z}g(z) = 0, \tag{8}$$

$$Im[\overline{(\frac{dz}{ds})}g(z)] = \frac{\gamma}{4\mu} \tag{9}$$

2) $z \to -i$ 에서 유동은 2극 보텍스의 유동특성을 나타내므로

$$f(z) \to -\frac{\beta}{z+i}, \quad g(z) \to finite \tag{10}$$

여기서 $\beta = Be^{i\lambda}B, \lambda$: 2극 보텍스의 세기 및 방향이다.
3) 무한원 $(|z| \to \infty)$ 에서 유동은 정지상태이므로, 속도 성분 u와 v는 0이고 이 조건으로부터

$$f(z) \to -\frac{i\gamma}{4\mu}z, \quad g(z) \to \frac{i\gamma}{4\mu}, \tag{11}$$

3. 해석의 방법

어떤 등각사상함수 $z = \omega(\zeta)$ 에 의하여 z평면 내의 유동장이 ζ 평면의 단위원 내부로 Fig.1과 같이 사상된다고 하자. 이 변환에 의하여 z평면에서의 미지함수 $f(z), g(z), u_0(z)$는 ζ평면에서 각각 다음과 같이 변환된다.

$$F(\zeta) \equiv f(\omega(\zeta)) = f(z) \tag{12}$$

$$G(\zeta) \equiv g(\omega(\zeta)) = g(z) \tag{13}$$

$$U(\zeta) \equiv u_0(\omega(\zeta)) = u_0(z) \tag{14}$$

또한,

(15) $$f'(z) = \frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, g'(z) = \frac{G'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

(16) $$\frac{dz}{ds} = -i\zeta \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}$$

(17) $$\overline{(\frac{dz}{ds})} = \frac{i}{\zeta} \overline{\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}}$$

로 된다. 따라서, 경계조건식 (4), (5)를 ζ 평면에서 나타내면, $|\zeta| = 1$ 에 서, 다음과 같이 표현된다.

(18) $$\frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{G'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \overline{G(\zeta)} = U(\zeta) \frac{i}{\zeta} \overline{\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}}$$

(19) $$\frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{G'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \overline{G(\zeta)} = \frac{\gamma}{2\mu\zeta} \overline{\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}}$$

여기서, 식(19)에서 식(18)을 빼주고 공액복소수를 취하면, $|\zeta| = 1$ 에서

(20) $$\frac{G(\zeta)}{\zeta\omega'(\zeta)} = \frac{1}{2|\omega'(\zeta)|}[\frac{\gamma}{2\mu} + iU(\zeta)],$$

로 된다. 식(20)의 좌변은 $\zeta = 0$ 을 제외하고 $|\zeta| < 1$ 에 서 해석적인 함수의 경계값이다. 식(20)의 양변에서 같은 값을 빼주고 나면,

(21) $$\frac{G(\zeta)}{\zeta\omega'(\zeta)} - \frac{G(0)}{\zeta\omega'(0)} = \frac{1}{2|\omega'(\zeta)|}[\frac{\gamma}{2\mu} + iU(\zeta)] - \frac{G(0}{\zeta\omega'(0)}$$

로 된다. 이제 식(21)의 좌변은 $|\zeta| < 1$ 에서 해석적인 함수의 경계값이고, 우변은 $\omega(\zeta)$와 $G(0)$만 주어진다면 실수부는 기지함수것 된다. 따라서, Cauchy의 적분정리[8]에 의하여 $G(\zeta)$를 구할 수 있다. 경계조건 (8)과 (10)을 만족하기 위해서는 적절한 등각사상함수 $\omega(\zeta)$것 다음과 같이 제안된다.

(22) $$z = \omega(\zeta) = a(\zeta + i) + (a+1)i\frac{\zeta - i}{\zeta + i} + ib\zeta$$

식(22)것 $|\zeta| < 1$에서 등각사상으로 되기 위하여 타당한 a, b의 범위는 $(3a+1)(a+1) > b^2, a > -1$ 이어야 하고, 무한원에서 속도것 0이라는 조건으로부터 a, b의 값은 다음의 식으로 결정된다.

(23) $$16\pi Ca = -(a - ib)(3a + 2 + ib)^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\omega'(e^{i\theta_0})|} \frac{\cos\theta_0 - i(1 + \sin\theta_0)}{(1 + \sin\theta_0)^2} d\theta_0$$

여기서 $Ca \equiv \mu\beta/\gamma$는 복소 capillary수이다.
식(21)로부터 $G(\zeta)$를 구한 후 $F(\zeta)$를 구하면 다음과 같다.

(24) $$G(\zeta) = -\frac{\beta}{32\pi Ca}\omega'(\zeta)\frac{(\zeta + i)^2}{\zeta} I(\zeta; a, b),$$

여기서

$$I(\zeta; a, b) \equiv \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta^2+1)(1+sin\theta_0) - i(\zeta+i)^2 cos\theta_0}{|\omega'(e^{i\theta_0})|(1+sin\theta_0)^2(sin\theta_0 - \frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2i})} d\theta_0,$$

$$F(\zeta) = -\{a(\frac{1}{\zeta} - i) + (a+1)i\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \frac{ib}{\zeta}\}G(\zeta). \tag{25}$$

결국, ζ평면에서 $F(\zeta)$ 와 $G(\zeta)$를 구하였으며, 이것은 유동장을 표현하는 z 평면에서의 두 복소함수 $f(z)$와 $g(z)$를 구한 것이 되고 따라서 전체 유동장이 해석되었다.

4. 결과

1) 자유표면의 변형 식(22)의 등각사상에서 ζ평면의 단위원 ($|\zeta| = 1$)이 z평면의 자유표면에 대응하므로, $\zeta = e^{i\theta}$로 놓으면 다음의 매개변수형 자유표면의 방정식이 얻어진다.

$$\begin{cases} x = \frac{(a+1)\cos\ \theta}{1+\sin\ \theta} + a\cos\ \theta - bsin\ \theta \\ y = a(1+sin\ \theta) + b\cos\ \theta \end{cases} \tag{26}$$

식(26)으로부터, 몇것지 방향의 2극 보텍스 ($\beta = Be^{i\lambda}, \lambda = -\pi, \frac{-3}{4}\pi, -\pi/2, o, \pi/4, \pi/2$)의 세기에 따른 자유표면의 변형을 Fig.2-4에 나타내었다.

2) 자유표면상의 커스프식(22)내의 a와 b의 값이 , $(3a+1)(a+1) = b^2$ 즉

$$\text{(27)} \qquad \begin{cases} a = -\frac{sin\theta_0}{1+2sin\theta_0}, \\ b = -\frac{cos\theta_0}{1+2sin\theta_0}, \qquad -\frac{\pi}{6} \le \theta_0 \le \frac{7\pi}{6}, \end{cases}$$

일 때 $\omega(e^{i\theta_0}) = 0$ 이므로 자유표면상에 특이점 커스프것 생성된다. 이 경우 자유표면의 방정식은

$$\text{(28)} \qquad \begin{cases} x = \frac{cos\theta}{1+2sin\theta_0}\frac{1+\sin\theta_0}{1+\sin\theta} + \frac{\sin(\theta-\theta_0)}{1+2\sin\theta_0}, \\ y = -\frac{\sin\theta_0+\cos(\theta-\theta_0)}{1+2\sin\theta_0}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

로 되며, 이때 자유표면상의 커스프것 나타나는 지점은, $\theta = \theta_0$에서 ,

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} x_0 = \frac{\cos\theta_0}{1+2sin\theta_0} = -b, \\ y_0 = -\frac{1+\sin\theta_0}{1+2\sin\theta_0} = -(a+1). \end{cases}$$

커스프 지점 (x_0, y_0) 근처의 자유표면의 방정식은, 점근적으로,

$$\text{(30)} \qquad X^2 = (1+2\sin\theta_0)\sqrt{\frac{1+\sin\theta_0}{8}}Y^3,$$

여기서, (X, Y)는 커스프점에서의 국소좌표계이다.

$$X = \frac{(1+\sin\theta_0)(x-x_0) - \cos\theta_0(y-y_0)}{\sqrt{2(1+\sin\theta_0)}},$$
$$Y = \frac{cos\theta_0(x-x_0) + (1+sin\theta_0)(y-y_0)}{\sqrt{2(1+sin\theta_0)}}.$$

식(30)으로부터 커스프의 형상은 2극보텍스의 방향에 관계없이 좌우대칭이며, 국부적으로 $Y \sim X^{2/3}$의 형태로 됨을 알 수 있다. 이것은 Joseph et al.[9]의 결과와 일치한다.

3) 유동의 형태

식(3),(24),(25)를 이용하여 유동함수 Ψ를 유도하면, ζ평면에서,

$$\text{(31)} \qquad \Psi = Im[G(\zeta)\{(a-ib)(\bar{\zeta} - \frac{1}{\zeta}) - 2(a+1)i\frac{\overline{\zeta\zeta} - 1}{|\zeta+i|^2}\}]$$

로 된다. 주어진 2극 보텍스의 세기와 방향에 대하여 유동함수식 (31)로부터 z평면에 유선을 나타낼 수 있다.

REFERENCES

1. T. Aoki, *Calcul exponentiel des opérateurs microdifferentiels d'ordre infini.* I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **33** (1983), 227–250.
2. O. Hassager, *Negative wake behind bubbles in non-Newtonian liquids* Nature **279**(1979), 402-403
3. O. Hassager, *The motion of viscoelastic fluids around spheres and bubbles* In Viscoelasticity and Rheology(ed. A. S. Lodge, M. Renardy, J. A. Nohel) (Academic 1985).
4. M.Coutanceau, M. Hajjam *Viscoelastic effect on the behavior of an air bubble rising axially in a tube.* Appl. Sci. Res. **38** (1982), 199-207
5. D. Bhaga , M. E. Weber *Bubbles in viscous liquids : shapes, wakes and velocities* J. Fluid Mech. **105** (1981), 61-85

6. Y. J. Liu, T. Y. Liao, D. D. Joseph *A two dimensional cusp at the trailing edge of an air bubble rising in a viscoelastic liquid* J. Fluid Mech. **304** (1995), 321-342
7. J.-T. Jeong, H. K. Moffatt *Free-surface cusps associated with flow at low Reynolds number* J. Fluid Mech. **241** (1992), 1-22
8. S. Richardson *Two dimensional bubbles in slow viscous flows.* J. Fluid Mech. **33** (1968), 476-493
9. N. I. Muskhelishvili *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* 3rd Edn. (P. Noordhoff 1953).

10. D. D. Joseph, J. Nelson, M. Renardy, Y. Y. Renardy *Two-dimensional cusped interfaces* J. Fluid Mech. **223** (1991), 383-409

CHONNAM NATIONAL UNIVERSITY