Abstract

거리미분기하학이란 미분기하학 특히 리만기하학에서 거리함수와 관련된 일련의 방법론들을 쓰는 분야를 지칭하는 말이다. 이러한 이론은 근래에 들어 괄목할만한 발전을 보였으며 이는 더욱 일반적인 공간으로 확장되고 있다. 본 개론에서는 이러한 변화에 대하여 간단히 살펴보고 이와 관련된 문제와 앞으로 나아갈 바에 대하여 제언한다. (이 개론은 결코 거리미분기하학의 결과에 대한 개론이 아니다. 오히려 거리미분기하학의 개개의 결과는 해당하는 개론 논문과 거기에 언급된 논문들을 참조하기 바라며 여기서는 이러한 흐름을 일반적인 관점에서 바라보고, 이와 관련하여 생각할 수 있는 점을 적으려고 한다.)

거리 미분기하학 개론

김 영 욱

고려대학교 이과대학 수학과

ywkim@semi.korea.ac.kr

September 14, 1998

거리미분기하학이란 미분기하학 특히 리만기하학에서 거리함수와 관련된 일련의 방법론들을 쓰는 분야를 지칭하는 말이다. 이 이론은 80년대에 처음 나타나자마자 괄목할만한 발전을 보였으며 더욱 일반적인 공간으로 확장되고 있다. 본 개론에서는 이러한 변화에 대하여 간단히 살펴보고 이와 관련된 문제와 앞으로 나아갈 바에 대하여 제언한다. 여기서 논하는 결과들의 증명은 대부분 일반적인 기하학 교과서에서 찾을 수 있다. 특히 Petersen 교수의 교과서와 지동표, 윤갑진교수의 강의록을 참조하기 바란다. 이 밖에 개론을 적은 책과 논문들을 참고문헌에 삽입하였으며 이러한 문헌들의 참고문헌목록을 참조하면 적어도 90년대 중반까지는 거의 완벽한 문헌목록을 얻을 수 있을 것이다. (이 개론은 결코 거리미분기하학의 결과에 대한 개론이 아니다. 오히려 거리미분기하학의 개개의 결과는 해당하는 개론 논문과 거기에 언급된 논문들을 참조하기 바라며 여기서는 이러한 흐름을 일반적인 관점에서 바라보고, 이와 관련하여 생각할 수 있는 점을 적으려고 한다.)

Gromov 의 Hausdorff 거리

1. 20 세기 후반에 들어 리만기하학은 일련의 비교정리를 중심으로 하여 발전하여 왔다. 비교정리들은 비교되는 두 공간 사이의 곡률의 대소관계와 다른 기하학적 量들의 대소관계를 관련짓는다. 이전에 리만기하학의 발전은 위상적으로 둥근 공을 자리매김하는 소위 sphere theorem 이라는 일군의 정리들이 대표한다고 하여도 지나치지 않다. 그러나 1980년대를 전후하여 Gromov 의 연구결과들에 의하여 리만기하학은 새로운 전기를 맞게 되었다. 주로 기하학적이고 직관적인 몇가지 개념들을 구성하고 단순면서도 교묘한 논법을 써서 Gromov 는 거칠지만 중요한 대역기하학적 성질들을 밝혀냈다. 이러한 성과에 힘입어 많은 리만기하학자들이 새로운 방법론을 도입하였고 1990 년대에 들어 많은 결과들이 쏟아져 나왔다.

이러한 방법론의 시작은 Gromov 가 1981 년도에 발표한 그의 논문 "Groups of polynomial growth and expanding maps(IHES Publ.)" 에서 Hausdorff 의 오래된 집합사이의 거리개념을 본질적인(intrinsic) 개념으로 확장하면서라고 할 수 있다. 그는 옹골찬 거리공간 X 와 Y 에 대하여 두 공간 사이의 거리 $d_{\mathrm{GH}}(X,Y)$ 를 다음과 같이 정의했다:

거리공간 (Z,d)의 옹골찬 부분집합 U,V 사이의 Hausdorff 거리를

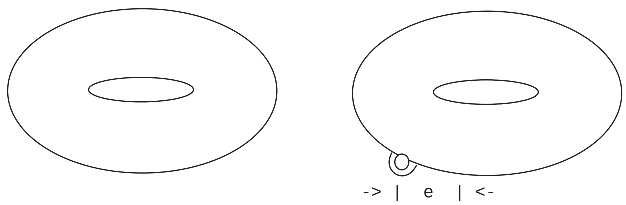
$$d_{\mathrm{H}}^{Z}(U,V) = \inf\{\varepsilon : U \subset B(V,\varepsilon), V \subset B(U,\varepsilon)\}$$

이라 할 때, 모든 가능한 등거리 매립사상 $X \to Z$ 와 $Y \to Z$ 에 대하여

$$d_{\mathrm{GH}}(X,Y) = \inf d_{\mathrm{H}}^{Z}(X,Y)$$

라 놓는다. 이 정의에서 실제로는 모든 가능한 거리공간 (Z,d) 를 생각할 필요가 없으며 단지 X 와 Y 의 disjoint union 인 $X \coprod Y$ 만을 생각해도 충분하다.(연습문제: 이 사실을 보이시오.) 이렇게 정의된 거리를 그로모프의 하우스도르프 거리 또는 간략히 **GH–거리**라고 부르기로 한다. 이렇게 정의된 거리함수는 특히 옹골찬 리만 다양체들의 공간에 위상을 정의한다.

$\boxed{\text{예}}$: 다음 그림과 같은 두 다양체 M 과 N 을 생각하자.



여기서 $d_{\mathrm{GH}}(M,N) < \varepsilon$ 이지만 두 다양체 M,N 은 서로 미분동형도 위상동형도 아니다.

2. 옹골찬 거리공간들의 isometry class 들의 공간을 $\mathcal{M}$ 이라고 하자. 그러면

정리 1 $(\mathcal{M}, d_{\mathrm{GH}})$ **은 분해가능하고***(separable)* **완비인 거리공간이 된다.**

여기서 분해가능함은 실제로 모든 옹골찬 거리공간이 그 공간안의 유한개의 점들로 이루어진 그물(net)로 GH–근사된다는 사실에 불과하다.(연습문제: 이를 정확히 서술하여 보시오.) "이러한 거리공간이 어떠한 의미를 가지는가," 즉, "GH–거리가 다양체의 성질을 연구하는데 얼마만큼 쓸모가 있는가"라는 물음에는 다음과 같은 생각을 해 보아야 한다.

Q 1: d_{GH} 의 의미로 수렴하는 예 가운데 자명하지 않은 수렴의 예가 많은가?

Q 2: GH–거리는 다양체의 기하학적 성질을 충분히 반영하고 있는가? 즉, $d_{\mathrm{GH}}(X,Y)$ 가 작을 때, X 와 Y 의 기하학적 성질들이 가깝다고 말할 수 있는가?

이와 같은 질문에 대한 대답을 다음 절에서 간단히 알아본다.

기본적인 결과들

3. X 가 옹골찬 거리공간일 때, X 의 離散된 점들(그물)로서 서로간의 거리가 적어도 $\varepsilon > 0$ 이상 떨어진 것들의 집합의 원소의 개수를 생각한다. 이러한 개수

의 최대값을 이 공간의 ε-packing 수라고 하고 $Cap_X(\varepsilon)$ 으로 나타낸다. 이 때, 공간 $\mathcal{M}$ 에서 옹골찬 부분집합은 다음과 같은 꼴로 설명할 수 있다.

정리 2 (Gromov의 相對옹골성 정리) *$\mathcal{C} \subset (\mathcal{M}, d_{GH})$ 에 대하여 다음들은 동치이다.*

(i) *$\mathcal{C}$ 가 상대옹골(precompact)이다.*

(ii) *적당한 함수 $N(\varepsilon) : (0, \alpha) \to (0, \infty)$ 가 존재하여, $Cap_X(\varepsilon) \leq N(\varepsilon)$ 이 모든 X 에 대하여 성립한다.*

이 정리로 부터 GH–거리가 얼마나 유한개의 점의 기하에 의존하는가라는 느낌을 눈치챌 수 있을 것이다. 이러한 점은 GH–수렴과 관련된 정리에서 항상 찾아 볼 수 있다.

이 자리매김 방법은 매우 유용하여 부피에 대한 Bishop-Gromov 의 비교정리와 함께 다음과 같은 상대옹골성을 얻는데 쓰인다.

따름정리 1 *$n \geq 2$, $D > 0$ 이고, k 는 임의의 실수일 때,* Ric $\geq (n-1)k$ *를 만족하고 지름이 D 를 넘지 않는 n-차원 옹골리만다양체들의 집합은 상대옹골이다.*

4. 앞 절에서 제기된 두번 째 물음(**Q 2**)에 대하여 Gromov 는 주어진 차원을 갖고 , 단면곡률이 위 아래로 제한되고, 지름의 상한이 D 이며 단사반지름(injectivity radius)의 하한이 $\mu > 0$ 인 다양체들의 GH–극한의 구조를 밝혔다. 이러한 다양체들의 모임을 $\mathcal{M}(n, D, \mu)$ 라고 나타내기로 하자.

정리 3 (Gromov 의 수렴정리) *X 가 $\mathcal{M}(n, D, \mu)$ 의 공간들의 GH–극한일 때, X 는 C^∞–다양체가 되며 $C^{1+\alpha}$ 계량을 갖는다.*

한편, GH–거리가 가까운 다양체에 대하여는 다음과 같은 성질이 있다.

정리 4 (Gromov, Katsuda(勝田), Shikata(四方)) *X, Y 가 각각 $\mathcal{M}(n, D, \mu)$ 의 공간들의 GH–극한일 때, 이 두 공간의 GH–거리가 충분히 가까우면 X 와 Y 는 서로 미분동형이다.*

이 결과를 쓰면 Cheeger 의 Princeton 학위논문의 결과인 $\mathcal{M}(n, D, \mu)$ 의 微分同型類의 개수의 유한성정리를 얻는다.

5. 위에서 알아본 공간 $\mathcal{M}(n, D, \mu)$ 에서 단사반지름에 대한 조건을 빼면 새로운 현상(붕괴현상)이 일어난다. 이는 앞절의 첫번째 물음(**Q 1**)에 대답하는많은 자명하지 않은 예를 제공하지만 여기서는 가장 기본적인 예 하나만을 알아보고 지나간다.

$\boxed{\text{예}}$: $S^3(1)$ 을 $\mathbb{C}^2$ 의 단위 구라고 생각할 때 이 위에 S^1의 원소 $e^{i\theta}$ 가 각 복소성분에 곱셈으로 작용한다고 하자. 즉,

$$e^{i\theta} : (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \longrightarrow (r_1 e^{i(\theta_1+\theta)}, r_2 e^{i(\theta_2+\theta)})$$

으로 작용한다. 이 때, S^3 의 계량 g를 이 작용의 궤도 방향의 계량 h_0 와 이의 수직방향의 계량 h_1 로 나누고 이를 변형하여 새로운 계량

$$g_\varepsilon = \varepsilon^2 h_0 \oplus h_1$$

을 만들자. 이러한 계량 g_ε 을 갖는 구 S^3_ε 을 Berger 의 구라고 부른다. 여기서 ε 을 0으로 보내면 이 구는 붕괴(collapse)되어 $S^2(1/4)$ 로 GH–수렴한다. 이 때, S^3_ε 의 단면곡률은 구간 $[\varepsilon^2, 4-3\varepsilon^2]$ 안에 놓이게 되어 곡률이 고르게 유지되며 붕괴되는 경우가 된다. (S^3 에서 $S^2(1/4)$ 로의 사상은 유명한 Hopf fibration 이다.)

이러한 붕괴현상의 국소적 구조와 대역적 구조를 Cheeger, Gromov 와 深谷(Fukaya)가 밝혔다. 실제로 이러한 붕괴가 일어날 때는 수렴하는 공간이 극한공간 위에 fiber 다발의 모양을 띄며 그 fiber 는 nipotent 군의 離散부분군에 의한 quotient space 를 有限피복공간으로 갖는 공간이 된다.(이런 공간을 infra-nilmanifold 라 부른다.)

알렉산드로프 공간

6. 거리공간의 기하학에서 리만기하학과 버금가는 이론을 만들기 위하여 필요한 조건이 몇가지 있다. 이 대부분은 주어진 거리가 기하를 하기에 충분히 좋도록 하는 위상적인 조건들로서, 공간의 Hausdorff 차원이 정수라던가, 국소옹골공간이라던가, 주어진 거리가 內거리(inner metric)이라던가하는 것이다. (거리 d 가 내거리라 함은 임의의 두 점 p, q 사이의 거리가

$$d(p,q) = \inf\{\sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) : a_0 = p, a_n = q\}$$

로 주어짐을 뜻한다.)

이러한 공간에 리만기하학의 비교정리와 같은 방법론을 도입하려면 곡률 개념이 필요하다. 거리 공간에 곡률 상한 및 하한의 개념을 처음 도입한 것은 Alexandrov 였다. 측지삼각형의 내각의 합을 써서 곡면의 곡률을 다룬 그의 방법은 Alexandrov-Toponogov 의 비교부등식을 얻은 후 이를 정의로 하여 Alexandrov 공간의 개념으로 확립되었다.

리만다양체 M 위의 임의의 세 점 p_0, p_1, p_2 와 $d(p_1,p_2) = d(p_1,p_3) + d(p_3,p_2)$ 를 만족하는 임의의 점 p_3 에 대하여 $d(p_i,p_j) = \|q_i - q_j\| (i,j = 0,1,2)$ 가 되도록 세 점 q_0, q_1, q_2 를 $\mathbb{R}^2$ 에서 잡고, 점 q_3 는 $d(p_1,p_3) = \|q_1 - q_3\|$ 이고 선분 q_1q_2 위에 놓이도록 잡자.

정리 5 (Alexandrov-Toponogov 의 정리) **이 때, 리만다양체 M 의 단면곡률 $K(M)$ 이 항상 $K(M) \geq 0$ 를 만족하기 위한 필요충분조건은 항상 부등식**

$$d(p_0,p_3) \geq \|q_0 - q_3\|$$

가 성립하는 것이다.

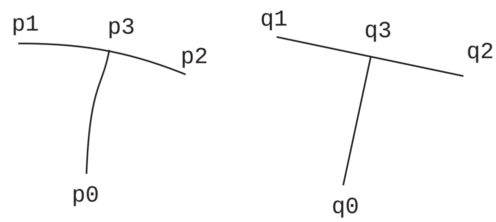


Figure 1: Alexandrov-Toponogov 비교정리

이 정리는 약간의 수정을 거쳐서 단면곡률이 임의의 주어진 수보다 크다는 성질을 나타내는 꼴로 바꿀 수 있다. 일반적으로 위에서 이야기한 모든 성질을 갖는 공간을 Alexandrov 공간이라고 부른다.

단면곡률이 갖는 성질은 거리를 사용한 부등식으로 나타낼 수 있으나 그 밖의 곡률이 갖는 성질을 부등식으로 바꾸는 것은 쉽지 않은 것으로 보인다. 이 가운데 가장 바람직한 것은 Ricci 곡률이 갖는 성질을 거리함수를 써서 (미분이 쓰이지 않은 꼴로) 나타내는 것이다. 이에 대하여 많은 사람들이 연구하였으나 아직 단서를 잡지 못하였다.

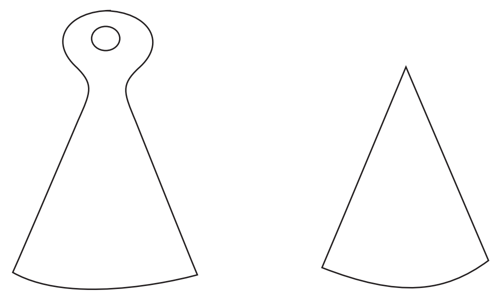
7. Alexandrov 공간을 연구하는 것은 단순히 곡률이나 비교정리를 쓴 기하학을 확장한다는 뜻 이상의 것이 있다. 곡률이 하한을 갖는다는 성질은 GH–수렴에 대하여 잘 보존된다. 즉, $\text{GH-}\lim M_i = M$ 일 때, 모든 i 에 대하여 $K(M_i) \geq k$ 이 성립한다면, $K(M) \geq k$ 이다. 이 성질은 매우 특수한 성질이다.

이를 잘 알아보려면 GH–수렴이 어떠한 성질을 보존하고 어떠한 성질을 보존하지 않는지 알아볼 필요가 있다. GH–수렴이 옹골찬 공간에서 유한한 그물망의 수렴에 의존한다는 사실을 잘 살펴보면 수렴하는 공간의 거리를 써서 조합적으로 만들어진 모든 기하학적인 量은 GH–극한에서 연속적으로 행동함을 알 수 있다. 예를 들면, 옹골공간의 지름은 GH–위상에 대하여 연속인 함수이다.(지동표, 윤갑진 교수 강의록 참조.) 그러나 일반적으로 미분개념 또는 극한개념을 써서 정의된 양들은 GH–수렴과는 잘 맞지 않는다. 또 위상이나 이와 관련된 개념들도 마찬가지이다.(예를 들면, Hausdorff 차원은 GH–수렴에서 보존되지 않는다.)

$\boxed{\text{예}}$: 아래 그림과 같이 원뿔곡면의 꼭지점 근방에 평탄한 torus 를 이어 붙인다. 이 때, 곡률이 모든 점에서 0 보다 작거나 같도록 할 수 있다. 이 곡면의 크기(scale)를 줄여나가면 꼭지점 근방의 torus 는 작아져서 점으로 수렴하며 이 곡면은 본래의 원뿔로 GH–수렴하게 된다.(여기서 곡면이 옹골이 아닌 점은 중요하지 않다. 원한다면 곡면의 하단부를 막아 옹골로 만들 수 있을 것이다.) 여기서 수렴하는 동안 곡면의 꼭지점 부근의 곡률은 0 보다 작거나 같지만 극한곡면의 꼭지점은 무한히 큰 곡률을 갖는 점이 된다.

이러한 현상이 일어나는 이유는 유한개의 그물망을 써서 수렴을 관장하는 방법으로는 매우 작은 부분의 변화를 잘 감지할 수 없기 때문이다. 이러한 점을 감안하여 보면 GH–수렴이 곡률하한을 보존한다는 것은 비교적 특이한 성질이라고 할 수 있다.

일반적으로 공통되는 곡률하한을 갖는 리만 공간들의 모임은 많은 좋은 성질들을 갖고 있으며 이미 앞에서 본 바가 있다. 이러한 모임에 GH–거리를 주어 만



든 거리공간은 완비공간은 아니다. 따라서 이러한 리만공간들의 GH–극한의 성질을 밝히는 것은 흥미로운 문제이다. 이미 본 바와 같이 이러한 극한들을 모두 Alexandrov 공간이 된다. 그러나 Alexandrov 공간이 모두 이러한 리만다양체의 Gh–극한으로 나타나는지는 알려져 있지 않다.

8. Alexandrov 공간의 특수한 성질의 하나는 모든 점의 근방이 비교적 좋은 모양을 띄고 있다는 것이다. 다양체에서 처럼 모든 점의 충분히 작은 근방이 유클리드공간의 공 모양을 하고 있지는 않지만, 공이 구면 위에 구성된 고깔이듯이 Alexandrov 공간의 충분히 작은 근방들은 곡률이 1 이상인 Alexandrov 공간 위에 구성된 고깔 모양을 하고 있다.

이러한 좋은 국소구조는 Alexandrov 공간에서의 기하학이 생각밖으로 다양체의 기하학과 유사하며 기존의 기하학적 방법론을 확장하여 쓸 수 있음을 암시하고 있다. 최근에 들어 많은 리만기하학의 정리들이 Alexandrov 공간으로 확장되었으며 기존의 방법론보다 더욱 새롭고 발전된 방법들이 개발되고 있다. 이에 대하여는 Grove 와 Petersen 의 MSRI 논문집(Vol. 30)을 참조하기 바란다.

문제점들

9. 우리는 앞에서 거리기하학의 방법론과 기본적인 응용의 예를 알아보았다. 이 이론은 매우 훌륭한 방법론으로 판명되고 있다. 그러나 이 이론은 리만기하학에서 써 오던 해석학적인 방법을 적용하기 힘들다는 단점이 있다.

특히 Alexandrov 공간의 이론에서 이를 극복하기 위하여 생각해 볼 점은 어떻게 다양체에서의 접공간의 선형이론을 이러한 공간으로 확장하는가 하는 점일 것이다. 이는 우선적으로 선형 고깔공간에서의 선형기하를 구성할 필요가 있다는 점이다. 그러나 이러한 이론은 아직 시도된 바가 없다.

10. GH–수렴은 곡률하한을 갖는 공간에 대하여 특히 잘 행동한다. 이러한 공간은 유한한 개수의 꼴을 띄고 있으며 이를 구별하는데는 유용한 도구이다. 그러나 곡률상한을 갖는 공간을 생각할 때는 불편한 점이 많이 나타난다.

$\boxed{\text{예}}$: 상수곡률 $-k^2$ 을 갖는 쌍곡평면의 단위원판을 생각하자. $k > 0$ 를 $+\infty$ 로 보낼 때 이 공간 위의 거리함수는 일정한 극한을 갖는 것 처럼 보인다. 그러나 이 공간열은 GH–극한은 가질 수 없다. 따라서 이 열이 수렴한다면 GH–수렴보다 약한 수렴을 한다고 볼 수 있다. 이러한 수렴을 chracterize 하는 것도 중요한 문

제처럼 보인다.

11. GH–거리는 공간의 세밀한 구석은 잘 감지하지 못하는 어중간한 개념이다. 그러나 이러한 개념은 인간이 사물을 인식하는 방법에 비추어 보면 기존의 실수체계보다 더욱 현실에 가까워 보인다. 사람이 오감을 통하여 받아들이는 인식 자료들은 유한한 그물망과 같은 자료에 더 가까운 듯이 보이며, 이 논문을 쓰는 사람과 같이 눈이 나쁜 경우에는 더욱 더 그렇다. 그러나 이러한 사람도 공을 보면 비교적 둥글다는 느낌이 있고 개략적인 곡률의 개념도 느낄 것이다. 그리고 아마도 이러한 개념의 곡률이 적당히 pinching된 경우에 눈이 나쁜 사람들도 이 곡면이 위상적으로 공인 것 처럼 느껴질 것이다. 즉 거친 입자만으로도 우리의 현실을 나타내는데 부족함이 없을지도 모른다. 이러한 현상을 실수체계에 모형을 둔 다양체를 써서 근사하지 않고 직접 다룰 수 있는 기하학 및 해석학 체계를 만들 수 있는가는 궁금한 문제이다.

References

[CY] Chi, D.-P. and G. Yun, *Gromov-Hausdorff topology and its applications to Riemannian manifolds*, LNS **41**, RIM-GRAC, Seoul, 1998.

[F] Fukaya, K., "Hausdorff convergence of Riemannian manifolds and its applications," pp. 143-238 in *Recent topics in differential and analytic geometry*, edited by T. Ochiai, Adevanced studies in Pure Mathematics **18-I**, Academic Press, Tokyo, 1990.

[Gv] Gromov, M., *Sign and geometric meaning of curvature*, IHES/M/90/95 (1990).

[Ge] Grove, K., *Geometry on Alexandrov spaces*, Lecture note, 1993.

[GP] Grove, K. and P. Petersen, *Comparison Geometry*, MSRI Publ. **30**, Cambridge, New York, 1997.

[P] Petersen, P., *Riemannian Geometry*, GTM **171**, Springer, New York, 1998.

[RGA] Sakai et al., *Gromov*와 기하학, Reports on Global Analysis **XI**, Yurinsha, Tokyo, 1986.

[S] Sakai, T., *Riemannian geometry*, Shokabo, Tokyo, 1992 (in Japanese); AMS, Providence, 1996 (English Translation).

[Sh] Shiohama, K., *An introduction to the geometry of Alexandrov spaces*, LNS **8**, RIM-GARC, Seoul, 1993.