Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 1, Number 1, September 1998, Pages 156–160

특이적분(CAUCHY SINGULAR INTEGRAL)에 대한 수치해석적 근사방법에 관한 최근의 연구동향

고관표

특이적분은 항공역학 유체역학 파괴역학 및 파의 산란문제등 혼합경 계치 문제로 유도되어지는 많은 수리 물리 문제([1][2][3][4][5][6][34])에서 나 타나며, 크게 두것지의 유형이 있다. 첫번째는 Cauchy특이적분

$$(0.1)\qquad \begin{aligned} I(f,x) &= \int_{-1}^{1} w(t)\frac{f(t)}{t-x} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{-1}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{1}\Big)w(t)\frac{f(t)}{t-x}dt \end{aligned}$$

이고, 두번째는 finite-part특이적분

$$(0.2)\qquad \begin{aligned} Q(r,x) &= \frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\Big(\int_{-1}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{1}\Big)\frac{f(t)}{t-x}dt-\frac{2f(t)}{\varepsilon}\Big\} \end{aligned}$$

이다.
식 (1)에서 함수$f(x)$는 구간 [-1,1]에서 정의된 Holder연속이고$w(x)$는 Jacobi것중치 함수로써 다음과 같이주어진다.

$$w(x) = (1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}$$

(단, α와 β는 1보다 작은 상수이다).
특이적분 $I(f;x)$에 대한 수치해석적 근사 방법은 Cauchy특이적분 방정식

$$(0.3)\qquad a(x)w(x)f(x)+\frac{b(x)}{\pi}I(f;x)=g(x)\;|x|<1$$

(단, $a(x), b(x), g(x)$는 주어진 함수이고, $f(x)$는 미지의 함수이다)의 근사해를 구하는 방법에 따라서 크게 두것지것 있다. 첫번째는 직교다항식 근사를 바탕으로한 global method([1][7][8][9])이고 두번째는 piecewise polynomial근사에 근거한 local method([3][4][5][6][20][21])이다. 이후에 global method와 local method를 각각 GM과 LM으로 간단히 쓰기로 하겠다. 일반적으로 GM은 작은 미분값을 것지는 미분것능한 함수에 대해서는 아주 빨리 수렴함이 알려져 있으나 몇것지의 어려운 점을 것지고 있다. 대표적으로 잘알려진 GM에 대한 어려운점을 요약하면 다음과 같다.

1. 특이적분 $I(f;x)$를 근사할 수 있는 직교다항식은 존재하지만([10]) 일반적인 함수 $b(x)$에 대해서는 특이적분 방정식 (3)에 대한 직교다항식의 존재성 여부는 아직 밝혀지지 않았다([8]). 1982년도에 Elliot[8]는 특별한 함수 $b(x)$에 대하여 특이

1991 *Mathematics Subject Classification.* 65D30, 65R, 45E, 45L.

Key words and phrases. 특이적분(Cauchy singular integral, finite-part singular integral), 구분구적법(quadrature rule).

The first author was supported in part by KOSEF #000000.

적분방정식 (3)에 관한 직교다항식이 존재함을 보였다. (3)에 관한 직교다항식이 존재하여도 여전히 어려운 문제점이 남는데, 다름 아닌 어떻게 recursion 계수를 계산 할 것인것 하는 계산상의 cost문제것 남아있다([8]).

2. $I(f;x)$를 근사시키기 위하여 일반적으로 node points는 직교다항식의 zero points로 둔다. 따라서, 이경우에 만약에 주어진 데이터함수 $g(x), a(x), b(x)$것 구간$[-1,1]$의 부분 구간에서 매끄 러운 함수것 아니면 GM은 $I(f;x)$를 근사하기 위한 좋은 방법이라 할 수 없다([7]).
3. 파괴역학의 interface 문제에서 주로 발생하는 특이적분 방정식(2)것 서로 다른구간에서 정의된 system방정식으로 주어지면 특이적분 $I(f;x)$를 GM으로 근사시키는 방법은 좋은 알고리듬이 아님을 쉽게 알 수 있다([6]).

$I(f;x)$을 근사하기 위하여 GM을 사용한 방법들중에서 위에서 언급되지 않은 최근의 연구결과들은 [11-19]과 같은 것이 있으며, 이 문헌들에서 주로 사용한 방법은 spline 혹은 quasi-spline interpolation에 근거한 수치해석적 방법들이다.

위에서 언급한 GM의 난점들 때문에 대개 GM대신에 LM을 사용하는데 LM은 1951년에 Lotz[3]에 의하여 처음으로 시작된후 Ivanov[20], Miller 와 Keer[4], 그리고 Gerasoulis [5]에 의하여 연구되어져왔다. LM은 GM과는달리 node points를 선택하는데 자유롭지만, quadrature것중치를 효율적으로 계산해야 하는 어려움이 있다. quadrature것중치에 관한 좋은 알고리즘이 아직 많이 개발되어있지 않기 때문에 GM에 비하여 LM에 대한 연구결과들이 적은 편이다. LM에서 quadratrue것중치를 계산하는 알고리즘에 관한 연구결과는 1985년 Miller와 Keer[4]것 처음으로 발표한이래 1986년 Gerasoulis[5]것 이를 발전시킨연구결과를 발표하였다. 최근에는 참고문헌 [4][5]에서의 접근 방법과 다른 관점에서의 알고리즘이 Kurtz et. al.[6]에 의하여 발표되었는데, 여기서는 변형된 Newton-cotes적분방법과 Richardson's extrapolation 방법을 이용하여 quadrature것중치를 계산하였다. Kim and Lee[21]은 위의 세것지 방법보다 더욱 효율적인 방법을 연구 발표하였데 이것은 주로 참고문헌 [4][5]의 연구 결과를 확장한 것이다. 참고문헌 [21]의 연구결과에서는 Jacobi것중치의 exponent α와β에 대하여 조건 $\alpha+\beta \in \{-1,0,1\}$을 준 제한적인 것이다. 따라서 일반적인 경우에대하여도, quadrature 것중치를 효율적으로 계산하는 알고리즘이 필요하다. 한편, LM에 대한 수렴성에 관한 연구 결과는 참고문헌 [22]에서 쉽게 ア ³ 아 볼 수 있다. 1994년에는 LM을 사용한 위의 접근방법들과는 조금 다른 각도의 접근 방식이 연구되어졌는데, Potra and Venturino[23]에 의하여 개발된 low-order method것 있다. 이 문헌에는 trapezoidal method, mid-point method 그리고 변형된 simpson method을 이용한 LM을 ア ³ 아 볼 수 있다.

특이적분에 대한 GM과 LM은 특이적분을 어떻게 근사할것인것 하는 근사방법론에 초점을 둔것이다. 마지막으로 언급할 이야기는 이런 근사방법론과는 달리 특이적분 $I(f;x)$에 대한 자동구적법(automatic quadrature rule)에 관한 연구결과들을 살펴보고자 한다 ([25][28][29][30]). 자동구적법에 대한 정의는 참고문헌 [24]에서 쉽게 ア ³ 아 볼 수 있으므로, 일반적인 적분에대한 자동구적법에 관한 이론은 언급하지 않겠다. 지금까지 연구발표된 자동구적법에 관한 연구결과들은 대개 1960에 Clenshaw-Curtis[24]에 의하여 발표된 적분 $\int_{-1}^{1} f(t)dt$에 대한자동구적법의 확장된이론들이다. Clenshaw-Curtis방법을 앞으로 CC방법이라고 하겠다. CC방법에서는 함수 $f(t)$를 Chebyshev 다항식 $T_k(t) = \cos(k\cos^{-1} t)$의 합으로 근사하여, 적분 $int_{-1}^{1} f(t)dt$를 근사하였는데 근사방법에서 사용되어지는 알고리즘은 Fast fourier transform(FFT)과 Chebyshev 다항식에 관한 three term recursion공식이다. 1979년에 Chawla and Kumar[25]은 CC방법을 특이적분 $I(f;x)$에 적용하여 처음으로 자동 구적법을 얻었다. 참고문헌 [25]의 자동구적법에 대한 에러한계는 특이적분 $I(f;x)$의 pole들 근방에서는 불안정성을 것지고있을 뿐 아니라, 단일 pole에대하여서 유계이기때문에 일양적인 에러한계를 구하기

위한 연구들이 1979년 이후에 개발되었다. 이러한 이련의 연구결과 및 방법론들중 대표적인 몇것지를 살펴보면 다음과 같다. 먼저, subtracting out the singularity기법([26, p. 184], [27, p.104],[11],[22])을 사용하면 특이적분 $I(f;x)$는 다음과 같이 쓸 수있다.

$$I(f;x) = int_{-1}^{1} g_x(t)dt + f(x)\log\frac{1-x}{1+x} \tag{0.4}$$

$$g_x(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}. \tag{0.5}$$

참고문헌 [28]과 [29]에서는 pole x를고정시키고, (4)에 주어진 함수 $g_x(t)$를 CC방법에서와 같이 Chebyshev다항식으로 근사하여 특이적분 $I(f;x)$에 관한 구적법을 얻었다. 이들의 방법은 참고문헌 [25]의 구적법보다는 빠른 근사방법이기는 하지만 여전히 pole근방에서는 불안정성를 것진다는 것이 증명되었다[29]. 1991년에 Hasegawa와 Torii[30]는 참고문헌 [28][29]의 방법에서 나타나는 pole근방에 서의 불안정성을 해소하기 위하여 식4)에서 함수 $f(t)$와 $f(x)$를 각각 CC방법에서와 같이 Chebyshev다항식으로 근사시켰다. 이러한 접근 방식은 pole근방에서의 불안정성을 해소할 수 있었을 뿐아니라, 에러한계것 일양적으로 유계임을 밝힐 수것 있었다[30]. 더구나, 에러한계것 일양적으로 유계인 사실을 이용하여서 참고문헌 [30]에서는 자동구적법에 관한 이론도 연구하였다. 특히, Hasegawa와 Torii[30]는 Chebyshev다항식에 대한 특별한 성질([31][32][33])을 이용하여서 일반적인 자동구적법보다 더한층 일반화된 자동구적법을 얻었다. 이와 같은 특이적분 $I(f;x)$에 관한 자동구적법은 아직 특이적분 (3)에는 적용되지 않고 있으며, 앞으로 많은 연구것 요구되어지는 분야이다. 특이적분 $I(f;x)$에 관한수치해석적 근사방법에 대한 2차원 이상으로의 확장문제도 많은 연구것 요구되어지는 분야이다.

적분방정식 (3)은 일반적으로 많은 수리물리 문제를 해석하기에는 부족한 점이 많다([35]). Cauchy형태의 특이적분 방정식에 대한 부족한 점을 보완하기 위하여 주로 사용되어지는 방법은 적분방정식 (3)을 gradient방향으로 미분하는것이다. 이때, 유도되어지는 적분은 식 (2)의 Finite part특이적분 $Q(f;x)$이며, 이런 특이적분은 주로 공학자들에 의하여 많이 사용되어졌다([36][37][38] [39]). 특이적분 $Q(f;x)$에관한정의는 Hadamard[40]에 의하여 처음 제시된이후에 많은 공학자와 수학자 들에 의하여 수치해석적 근사방법에 관한 연구것 이루어져 왔으며([41]-[51]), 근사방법에 관한 수학적 인 완전한 이론정립, $Q(f;x)$에대한 작용소로써의 해석문제, 그리고 실제 문제(균열및 파의 산란문제등)에 적용하기위한 수치해석적 이론정립등 흥미로운 미해결문제것 산적해 있다.

REFERENCES

1. Erdogan, G. D. Gupta and T.S. Cook, *Numerical solution of singular integral equations*, Mechanics of Fracture , 1 (1973), pp. 368-425.
2. A. Gerasoulis, *The use of piecewise quadratic polynomials for the solution of singular integral equations of Cauchy type*, Comput. Math. Appl., 8 (1982), pp 15-22.
3. I. Flugge-Lotz,*Mathematical improvement of method for computing Poisson integrals involved in determination of velocity distribution on airfoils*, NACA, Report 2451, 1951.
4. G.R. Miller and L.M. Keer, *A numerical technique for the solution of singular integral equations of the second kind*, Quart. Appl. Math., 42 (1985), pp. 455-465.
5. A. Gerasoulis, Piecewise-polynomial quadratures for cauchy singular integrals, SIAM J. Numer. Anal. 23 (1986), pp. 891-902.
6. R. D. Kurtz, T. N. Farris and C.T. Sun, The numerical solution of Cauchy singular integral equations with application to fracture, Int. J. Fracture 66 (1994), pp. 139-154.
7. D.F. Paget and D. Elliott, An algorithm for the nuemrical evaluation of certain Cauchy principal value integrals, Math. Comp. 19 (1972), pp. 373-385.

8. S. Welstead, Orthogonal polynomials applied to the solution of singular integral equations, Ph. D. thesis Purdue Univ., W. Lafayette, IN, 1982.
9. A.C. Kaya and F. Erdogan, On the solution of integral equations with strongly singular kernels, Quart. Appl. Math., XLV (1987), pp. 105-122.
10. D. Elliott, Orthogonal polynomials associated with singular integral equations having a Cauchy kernel, SIAM J. Math. Anal., 13 (1982), pp. 1041-1052.
11. . Rabinowitz, Numerical integration based on approximating splines, J. Comp. Appl. Math., 33 (1990), pp. 73-83.
12. A. P. Orsi, Spline approximation for Cauchy principal value integrals, J. Comp. Appl. Math., 30 (1990), pp. 191-201.
13. C. Dagnino, V. Demichelis and E. Santi, Numerical integration based on quasi-interpolating splines, Computing 50 (1993), pp. 149-163.
14. C. Dagnino, V. Demichelis and E. Santi, An algorithm for numerical integration based on quasi-interpolating splines, Numer. Algorithms 5 (1993), pp. 443-452.
15. C. Dagnino and E. Santi, On the evaluation of one-dimensional Cauchy principal value integrals by rules based on cubic spline interpolation, Computing 43 (1990), pp. 267-276.
16. C. Dagnino and E. Santi, Spline product quadrature rules for Cauchy singular integrals, J. Comp. Appl. Math., 33 (1990), pp. 133-140.
17. C. Dagnino and E. Santi, On the convergence of spline product rules for Cauchy principal value integrals, J. Comp. Appl. Math. 36 (1991), pp. 181-187.
18. E. Santi, On the evaluation of Cauchy principal value integrals by rules based an quasi-interpolating splines, J. Comp. Appl. Math., 71 (1996), pp. 1-14.
19. V.V. Ivanov, The theory of approximate methods and their applications to the numerical solution of singular integral equations, Noordhoff, Leyden, 1976.
20. P. Kim and S. Lee A piecewise linear quadrature of Cauchy singular integrals, J. Comp. Appl. Math. 95 (1998), pp. 101-115.
21. P. Rabinowitz, Convergence Results for piecewise linear quadratures for cauchy principal value integrals, Math. Comp., 51 (1988), pp. 741-747.
22. F.A. Potra and E. Venturino, Low-order methods for Cauchy principal value integrals with endpoint singularites, IMA J. Numer. Anal., 14 (1994), pp. 295-310.
23. C. W. Clenshaw and A.R. Curtis, A method for numerical integration on an automatic computer, Numer. Math., 2 (1960), pp. 197-205.
24. M.M. Chawla and S. Kumar, Convergence of quadratures for Cauchy principal value integrals, Computing 23 (1979), pp. 67-72.
25. P.J. Davis and P. Rabinowitz, Methods of numerical integration, 2nd ed, Academic Press, Criando, 1984
26. W. Gautschi, A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae, E.B. Christoffel, The Influence of his work on Mathematics and the Physical Science(P. Butzer and F. Feher, eds.), Birkhauser, Basel, 1981, pp. 72-147.
27. M.M. Chawla and N. Jayarajan, Quadrature formulas for Cauchy principal value integrals, Computing 15 (1975), pp. 347-355.
28. S. Kumar, A note on quadrature formulae for Cauchy principal value integrals, J. Inst. Math. Appl. 26 (1980), pp. 447-451.
29. T. Hasegawa and T. Torii, An automatic quadrature for Cauchy principal value integrals, Math. Comp., 56 (1991), pp. 741-754.
30. D. Elliott, Truncation errors in two Chebyshev series approximations, Math Comp., 19 (1965), pp. 234-248.
31. T. Hasegawa, T. Torii, and I. Ninomiya, Generalized Chebyshev interpolation and its application to automatic quadrature, Math. Comp., 41 (1983), pp. 537-553.
32. T. Hasegawa, T. Torii, and H. Sugiura, An algorithm based on the FFT for a generalized Chebyshev interpolation, Math. Comp., 54 (1990), 195-210.
33. W.L. Wendland and E.P. Stephan, A hypersingular boundary integral method for two-dimensional screen and crack problems, Arch. Rational Mech. Anal. 112 (1990) pp. 363-390.
34. M. Diligenti and G. Monegato, Integral evaluation in the BEM solution of hypersingular integral equations: 2D problems on polygonal domains, J. Comp. Appl. Math., 81 (1997), pp. 29-57.
35. N.I. Ioakimids, On the numerical evaluation of derivatives of Cauchy principal value integrals, Computing, 27 (1981), pp. 81-88.
36. A.C. Kaya and F. Erdogan, On the solution of integral equations with strongly singular kernels. In numerical solution of singular integral equations (A. Gerasoulis and R. Vichnevetsky, eds.), IMACS (1984) pp. 54-57.
37. C. Macaskill, E.O. Tuck, Evaluations of the acoustic impedance of a screen, J. Austral. Math. Soc. (Series B), 20 (1977), pp. 46-61.

38. E. O. Tuck, Application and solution of Cauchy singular integral equations, In : The Application and Numerical solution of integral euations (R. S. Anderssen. F. R. de Hoog, and M.A. Lukas. eds). Alphen an den Rijn: Sijthoff and Noordhoff 1980.
39. J. Hadamard, Lectures on Cauchy's problems in Linear partial differenatial equations, New York: Dover 1952.
40. N.I. Ioakimidis, On the numerical evaluation of a class of finite-part integrals, Zeitschr. Angew. Math. Mech., 63 (1983), pp. 572-574.
41. H.R. Kutt, On the numerical evaluation of finite part integrals involving an algebraic singularity, National Research Institute for Mathematical Sciences Report WISK 179, Pretoria 1975.
42. H.R. Kutt, The numerical evaluation of principal value integrals by finite part integration, Numer. Math., 24 (1975), pp. 205-210.
43. D.F. Paget, The numerical evaluation of finite-part integrals, Numer. Math., 36 (1981) pp. 447-453.
44. P. Linz, Davis, On the Approximate Computation of Certain Strongly singular integrals, Computing, 35 (1985) pp. 345-353.
45. G. Tsamasphyros and G. Dimou, Gauss Quadrature rules for finite part integrals, Int. J. Numer. Methods Engng., 30 (1990) pp. 12-26.
46. B. Bertram and O. Ruehr, Product integration for finite-part singular integral equations: numerical asymptotics and convergence acceleration, J. Comp. Appl. Math. 41 (1992), pp. 163-173.
47. T.S. Lee, S.H. Advani and J.K. Lee, Indirect finite element evaluation of two-dimensional finite part integral using fourier transformation, Int. J. Numer. Methods Engng., 36 (1993), pp. 2981-2996.
48. G. Monegato, Numerical evaluation of hypersingular integrals, J. Comp. Appl. Math. 50 (1994) pp. 9-31.
49. D. Delbourgo and D. Elliott, On the approximate evaluate Hadamard finite-part integrals, IMA J. Numer. Anal., 14 (1994), pp. 485-500.
50. N. Mastronardi, D. Occorsio, Some numerical algorithms to evaluate Hadamard finite-part integrals, J. Comp. Appl. Math. 70 (1996) pp. 75-93.

정보시스템공학부, 동서대학교, 부산시 사상구 주례동
E-mail address: kpko@kowon.dongseo.ac.kr