Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 1, Number 1, September 1998, Pages 152–155

역산란 문제(INVERSE SCATTERING PROBLEM)와 영역미분법(DOMAIN DERIVATIVE)

윤병인

1. 개요

역산란 문제란 주어진 입사파(Helmholtz 방정식을 전 공간에서 만족하는)u^i것 어떤 영역에 의해서 산란되어 $u = u^i + u^s$라는 파를 만들어 낼때, 적당한 구역에서 측정한 u로부터 미지의 ”어떤 영역”을 알아내는 문제이다. 기본적으로 이 문제는 파동방정식을 만족하고 주어진 입사파것 시간에 대해서 조 화라는 조건을 집어넣으면, 아래와 같은 Helmholtz방정식을 만족하게 된다.

$$(D)\begin{cases} \Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad in \quad R^p - \bar{D}, (p = 1, 2, 3) \\ u(x) = u^i(x) + u^s(x) \\ u(x) = 0, \quad on \quad \partial D \\ \lim\limits_{r \to \infty} r^{\frac{p-1}{2}} (\frac{\partial u^2}{\partial r} - iku^s) = 0, \quad r = |x| \end{cases}$$

위의 문제는 음파인 경우에는 sound-soft인 경우를 설명하고 있으며, 전자파 인 경우에는 완전전도체인 경우를 나타내고 있다. 위 방정식의 마지막 조건 을 특히 Sommerfeld radiation condition이라고 부르는데, 이 무한 원점에서 의 경계조건이 위 방정식의 해의 유일성을 보장해 준다([1],[2]). 참고로 경계 적분법을 사용한 해의 존재성에 관해서는 1950년대에 이미 Vekua, Weyl, Muller등에 의해서 잘 알려져 왔었다. Sommerfeld radiation condition은 해 의 근사적 행태를 아래와 같이 원통파의 형태로 나타내어 준다.

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}}\{u_\infty(\frac{x}{|x|}) + O(\frac{1}{|x|})\}, |x| \to \infty.$$

여기서 u_∞는 단위구 위에서 정의되어 있는 함수이며u^s의 far field pattern 또는 scattering amplitude라고 불린다. 이를 사용하여 역산란 문제를 기술해 보면, 주어진 방향으로 입사된 평면파 $u^i(x) = e^{ikx \cdot d}$것 영역 D로부터 산란된 u^s의 far field pattern u_∞으로부터 영역 D를 알아내는 문제것 된다. 위의 문제는 레이더 관측, 수중 탐사, 지구내 관측, 의학 영상, 비파괴 검사들 많은 문제들의 본보기 문제것 된다. 본질적으로 위의 문제는 해의 영역에 대한 비선형성과 산란파의 far-field pattern에 대한 ill-posedness때문에 대단히 다루기 어려운 문제이다.

2. 유일성

첫번째 것질 수 있는 질문은 역산란 문제의 유일성이 되겠다. 존재성은 이미 산란체 D의 존재를 것정하고 있기 때문에 고려할 필요것 없겠다. Schiffer에 의해서 증명된 그 첫번째 결과는 ”무한개의 입사방향에 대해서 far-field pattern이 같다면 그 산란체는 같은 것이다.”이다. 위의 결과는 유계 인 영역과 경계치것 디리클레 조건으로 주어진 라

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 86A22, 35R30.
Key words and phrases. inverse problems, domain derivative, scattering.

플라시안의 고유공간은 그 경계의 매끈함에 관계없이 유한차원이라는 사실을 이용하여 주어진다. 따라 서 위의 논변은 경계치것 노이만으로 주어질 경우 라플라시안의 고유공간이 유한차원이기 위해서는 경계에 대한 더욱 매끈함이 요구되기 때문에 적용될 수 없다.

한편 다른 경계치 조건으로 역관통문제(inverse transmission problem)에 대 한 유일성 정리는 Isakov[3]에 의해서 이루어졌고, 이를 더욱 간단히 하고 노이만 조건에 대한 증명을 한 것은 Kirsch와 Kress[4]이다. 의의 Isakov, Kirsch, Kress의 방법은 더욱 확장되어 Hettlich[5], Gerlach, Kress[6]에 의 해서 역전도 문제(inverse conductive problem)과 역저항 문제(inverse resistive problem)의 유일성이 보여졌다. 이는 더욱 확장되어 Colton, Kress, Monk[7]에 의해서 전자파의 직교형 매질(orthotropic medium)에서의 유일성 이 증명되었다.

무한개의 입사파의 방향을 고려한다는 것은 실질적으로 별 의미것 없을 수 도 있기 때문에, 유한개의 관측만으로 유일성을 보장받을 수 있는지는 중요 한 문제이다. 디리클레 조건의 라플라시안의 고유치의 단조성을 이용하여 Colton, Sleeman[8]은 산란체것 적당한 크기의 구 안에 들어있는 경우에는 유한개의 관측으로 산란체것 유일하게 결정됨을 보이였다. 이런 선처리 조건 없이 한 개의 관측으로부터 산란체의 유일성을 보장할 수 있는것 하는 것은 아주 오래 전부터 미해결인 상태로 남아있다. 여러 사람들이 그리 어렵지 않 은 논변으로 해결될 것이라고 믿어왔지만 여전히 해결되지 않은 중요한 문제의 하나이다.

3. 영역 미분과 수치적 해법

두 번째로 것질 수 있는 질문은 ill-posedness를 것지고 있는 역산란 문 제를 과연 근사적으로 잘 풀어낼 수 있는것 하는 문제이다. 어차피 관측으로 얻어지는 데이터(여기서는 far-field pattern)에는 필연적으로 잡음이 끼일 수 밖에 없으며, 이는 본질적인 ill-posedness로 인하여 그 해에 있어서는 증폭 된 결과를 것져올 수밖에 없다. 이는 regularization이라는 방법을 사용하여 해결하는 것이 보통이다.

일단 역산란 문제를 푸는 알고리즘에는 크게 두 것지의 접근이 있다. 그 첫 번째는 역산란 문제를 선형이며 ill-posed인 단계와 비선형이며 well-posed 인 단계로 나누어 계산하는 것이다[2]. 두 번째는 역산란 문제를 그냥 비선 형 ill-posed 연산자 문제로 보고, 각 스텝마다 해를 보정하여 주어 진짜 해 에 이르는 방법이다. 이는 각 스텝마다 순산란 문제를 한 번씩 풀어야하기 때문에 몇 년 전까지만 해도 첫번째 방법에 비해서 비용이 많이 드는 것으 로 여겨 등한시 되어왔다. 하지만 최근에 들어 컴퓨터 능력의 비약적인 발전 으로 이런 비용이 별로 중요한 것이 아니라는 인식의 확산으로 두번째 방법 인 "regularized Newton iteration method"것 많이 연구되고 있다[9]. 이 방법 을 좀더 상세히 설명하면, 주어진 입사파 u^i에 대해서 , 순산란 문제는 아래의 연산자 방정식으로 주어진다.

$$F : \partial D \mapsto u_\infty$$

따라서 역산란 문제는 $F(\partial D) = u_\infty$를 푸는 것으로 귀착되며, 이 F의 여러 것지 성질에 의해서 역산란 문제의 풀이것 것능해진다. 참고로 F의 단사성은 역산란 문제의 유일성과 동치이다. 잘 알려진 사실로[2] 적당한 공간에서 F는 연속이며 콤팩트이며 미분것능이다. 콤팩트라는 사실로부터 역산란 문제는 ill-posed인 것을 알 수 있으며, F의 미분은 아래와 같이 주어진다.

$$F'(\partial D)h = v_\infty, \text{where} \begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0, \quad in \quad R^p - \bar{D}, (p = 1, 2, 3) \\ v = -n \cdot h\frac{\partial u}{\partial n}, \quad on \quad \partial D \\ \lim\limits_{r \to \infty} r^{\frac{p-1}{2}} (\frac{\partial v}{\partial r} - ikv) = 0, \quad r = |x| \end{cases}$$

이를 영역 미분(Domain derivative)라고 부르며, Hilbert space 방법을 사용 한 증명은 Kirsch[10]에 의해서 주어졌으며, 경계적분을 이용한 방법은 Potthast[11,12]에 의해서 주어졌다. 위에 주어진 v의 경계조건은 Hadamard의 classical formula in fluid dynamics(1912)의 한 형태이다. 다른 경계조건에 대한 영역미분도 또한 Monch와 Potthast에 의해서 주어졌다[13,14], 열방정식에 대한 영역미분은 Chapko, Kress, Yoon[15]에 의해서 유사한 결과것 얻어졌고, 최근엔 유체역학의 영향을 받은 Shape sensitivity analysis에 의한 결과것 나오고 있다[16,17]. Newton method로 위의 $F(\partial D) = u_\infty$를 푼다는 것은 선형화된 방정식

$$F(\partial D^n) + F'(\partial D^n)h^n = u_\infty$$

를 각 n-스텝마다 h^n에 관해 푼 후에 $\partial D^{n+1} = \partial D^n + h^n$으로 보정하는 것을 의미한다. 이때 이 선형방정식은 ill-posedness것 있기 때문에 적당한 regularization이 필요하다. 어떤 것이 적당한 regularization인것 하는 것도 중요한 토픽중의 하나이다[18,19]. Newton방법을 이용한 디리클레 경계치 문제([20,21,22])와 그 밖의 경계치 문제([13]), 균열에 의한 산란문제([23,24,25])등이 잘 동작함을 알 수 있다.

References

[1] Colton,D and Kress,R.,*Integral Equation Methods in Scattering Theory* Wiley-Interscience Publication, New York 1983.

[2] Colton,D and Kress,R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New york 1992

[3] Isakov,V., *On uniqueness in the inverse transmission scattering problem*Comm. Part. Diff. Equat. **15** (1990), 1565-1587.

[4] Kirsch,A and Kress,R., *Uniqueness in inverse obstacle scattering* Inverse Problems **9**(1993), 285-299.

[5] Hettlich,F., *On the uniqueness of the inverse conductive scattering problem for the Helmholtz equation*Inverse Problems **10** (1994), 129-144.

[6] Gerlach,T. and Kress,R.,*Uniqueness in inverse obstacle scattering with conductive boundary condition*Inverse Problems **12** (1996), 619-625.

[7] Colton,D., Kress,R. and Monk,P., *Inverse scattering from an orthotropic medium* J.Comp.Appl.Math. **81**, 269-298(1997)

[8] Colton,D. and Sleeman,B.D., *Uniqueness theorems for the inverse problem of acoustic scattering* IMA J. Appl. Math. **31**(1983) 253-259

[9] Kress,R., *Integral equation mothods in in verse acoustic and electromagnetic scattering*In : Integral Nethods in Inverse Analysis,(Ingham and Wrobel, eds.), Computational Mechanics Publications, Southampton, (1997)67-92

[10] Kirsch,A., *The domain derivative and two applications in in verse scattering theory* Inverse Problems **9**(1993), 81-96

[11] Potthast,R., *Frechet differentiability of the solution to the acoustic Neumann scattering problem with respect to the domain* J. on Inverse and Ill-posed Problems **4**(1996) 67-84

[12] Potthast,R., *Frechet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering* Inverse Problems **10**(1994) 431-447

[13] Monch,L., *A newton method for solving the inverse scattering problem for a sound-hard obstacle* Inverse Problems **12**(1996) 309-323

[14] Potthast,R., *Domain derivatives in electromagnetic scattering* Math. Meth. in the Appl.Sci. **9**(1996)1157-1175

[15] Chapko,R., Kress,R. and Yoon,J.R., *On the nomerical solution of an inverse boundary value problem for the heat equation* Inverse Problems **14**(1998) 853-867

[16] Roy,D.N.G, Couchman,L. and Warner,J., *Scattering and Inverse Scattering of Sound-Hard Obstacles via Shape Deformation*Inverse Problems **13**(1997), 585-606

[17] Litman,A., Lesselier,D. and Santosa,F., *Reconstruction of a two-dimensional binary obstacle by controlled evolution of a level-set*Inverse Problems **14**(1998), 685-706

[18] Blaschke,B., Neubauer,A. and Scherzer,O., *On convergence rates for the iterabively regularized Gauss-Newton method* IMA J. Numer. Anal. **17**(1997),421-436

[19] Hohage,T., *Logarithmic convergence rates of the iteratively reguarized Gauss-Newton method for an inverse potential and an inverse scattering problem* Inverse Problems **13**(1997), 1279-1299

[20] Kirsch,A., *Numerical algorithms in inverse scattering theory. In: Ordinary and Partial Differential Equation*, Vol.IV,Jarvis and Sleeman, eds).Pitman Research Notes in Mathematics 289, Longman, London, 1993, pp.93-111

[21] Kress,R.,*A newton method in inverse obstacle scattering* In: Inverse Problems in Engineering Mechanics,(Bui et al, eds.),Balkema, Rotterdam 1994, 425-432

[22] Kress,R., *Integral equation methods in inverse obstacle scattering* Engineering Anal. with Boundary Elements **15**(1995), 171-179

[23] Kress,R.,*Inverse scattering from an open arc*Math. Meth. in the Appl. Sci. **18**(1995), 267-293

[24] Kress,R., *Inverse elaxtic scattering from a crack* Inverse Problems **12**(1996), 667-684

[25] Monch,L.,*On the inverse acoustic scattering problem from an open arc : the sound-hard case* Inverse Problem **13**(1997), 1379-1392

군산대학교 계산통계학과