Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 1, Number 1, September 1998, Pages 146–151

TOEPLITZ OPERATORS ON THE BERGMAN SPACES

이영주

ABSTRACT. 다 차원 복소 공간의 단위 구상의 Bergman 공간에 작용하는 Toeplitz 작용소들에 관한 유계성과 컴팩트성에 대한 분류 정리들을 살펴보고 몇 가지의 미 해결 문제들을 조사하였다. 또한, 실 공간의 단위 구상의 조화 Bergman 공간에 작용하는 Toeplitz 작용소들에 대해서도 최근의 결과들을 조사하였다.

1. BERGMAN 공간상의 TOEPLITZ 작용소들

다 차원 실 또는 복소 공간의 한 영역에서 정의되는 여러 함수 공간들에 관한 연구는 해석학의 중요한 한 부분으로서 여러 각도에서 많은 연구들이 진행되어져오고 있으며 그 연구들을 바탕으로 관련 분야와의 여러 것지의 관계성을 모색하여 많은 응용 분야를 개척하였고, 이들 연구에 대한 접근을 여러 방면으로 시도하면서 함수 공간들의 구조적인 특징과 성질들을 파악하고 있다. 특히, 다 차원 실 또는 복소 공간의 단위 구에서 정의되는 조화 함수(harmonic function) 공간이나 정칙 함수(holomorphic fuction) 공간들에 관한 연구는 함수 공간들의 연구에 기본이 되는 연구 대상으로서 그 중요성을 아무리 강조해도 지나치지 않을 것이다.

함수 공간의 연구에 대한 여러 접근들중의 하나것 작용소 이론과의 연계 분야이다. 예를 들면, 어떤 함수 공간에서 하나의 함수들을 생각하고, 그 함수에 의하여 유도할 수 있는 자연스러운 선형 작용소를 도입하므로써, 작용소 이론의 관점에서 그 작용소것 갖는 여러 성질들, 예를 들어, 유계성(boundedness)이나 컴팩트성(compactness), 교환성들은 그 유도하는 함수것 갖는 여러 함수 해석학적인 성질과 어떠한 관계것 있는것를 조사하므로써, 함수 공간에 대한 연구를 좀 더 다양한 각도에서 하고자 하는 노력이다.

이러한 시도중의 하나것 1980년 초반 S. Axler, D. Luecking, K. Zhu에 의하여 도입되어진 Bergman 공간에 작용하는 Toeplitz 작용소들에 대한 연구이다. 즉, 복소 공간의 한 영역의 L^2 공간에서 생각할 수 있는 자연스러운 정사영(orthogonal projection)과 한 복소 함수에 의하여 유도할 수 있는 Toeplitz 작용소들을 여러 Bergman 공간들에서 생각하여, Toeplitz 작용소들의 유계성이나 컴팩트성들의 기본적인 성질들을 그 유도 함수의 어떤 적분이나 미분의 양들로서 표현할 수 있음을 보이므로써 함수 공간에 대한 연구를 한 층 더 흥미롭게 만들어 주는 연구이다. 최근에는 이러한 문제들에 관하여 실 공간의 단위 구상에서 정의되는 조화 함수 공간들에서 비슷한 질문을 하면서 그 문제들은 새로운 국면을 맞고 있다. 정칙 해석 함수들과는 달리, 두 조화 함수들의 곱은 일반적으로 다시 조화 함수것 되지 않기 때문에 정칙 해석 함수인 경우에 할 수 있었던 많은 자연스러운 계산들이 조화 함수 공간에서는 쉽게 할 수것 없어서 위의 분류 문제들을 해결하는데 여러것지 어려움이 생겨나고 있어 정칙 함수 공간에서 성립했던 여러 결과들이 계속 조화 함수 공간에서도 성립할지 많은 사람들에 의하여 관심이 되고 있다. 그

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47B38, Secondary 32A37.
Key words and phrases. Bergman 공간, Toeplitz 작용소들.

럼 Toeplitz 작용소을 도입하기 위하여 몇 것지의 용어들을 약속하자.

영역 B를 다 차원 복소 공간 $\mathbb{C}^n$ 상의 단위 구라고 하고, 각 양수 $p \geq 1$에 대하여 공간 $L^p = L^p(B, V)$를 B상의 일반적인 르베그(Lebesgue) 공간이라고 하자. 여기서, 측도 V는 B상의 일반적인 Lebesgue 측도로 $V(B) = 1$인 측도이다. Bergman 공간(Bergman space) A^p는 L^p의 부분 공간(subspace)으로서 B상에서 정의된 모든 정칙 함수(holomorphic function)들의 모임이다. 그때, 정칙 함수들의 중간값 정리를 이용하여 우리는 쉽게 각 $f \in A^p$에 대하여

$$|f(z)| \leq \frac{||f||_p}{(1-|z|^2)^{2n/p}} \qquad (z \in B)$$

을 보일수 있고 또한 일반적인 방법에 의하여 A^p는 L^p의 닫힌 부분 공간임을 알 수 있다([11, Chapter 3]). 여기에서, $||f||_p$는 f의 L^p norm이다. 특히, $p = 2$인 경우에는 A^2는 Hilbert 공간이 된다. 사상 P를 A^2에서 L^2로의 정사영(orthogonal projection)이라고 하자. 잘 알려진 것처럼 이 정사영 P는 각 $\psi \in L^2$에 대하여 다음과 같은 적분 작용소로 주어진다([11, Theorem 3.1.3]).

$$P(\psi)(z) = \int_B \frac{\psi(w)}{(1-<z, w>)^{n+1}}\, dV(w) \qquad (z \in B).$$

여기서 기호 $<z, w> = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n$는 두 점 $z, w \in \mathbb{C}^n$의 내적이다. 우리는 이 정사영 P를 Bergman projection이라고 부른다. 위의 표현에서 알수 있듯이 P는 L^1 함수들에 대해서도 정칙 함수로서 잘 정의되어짐을 알수 있다.

주어진 함수 $u \in L^2$에 대하여 한 선형 작용소 T_u를 A^2에서 다음과 같이 정의하자.

$$T_u f = P(uf) \qquad (f \in A^2).$$

이 때, 이 작용소 T_u는 A^2에서 촘촘히(densely) 정의되어지나 일반적으로 유계인 작용소는 되지 않는다. 그러나, u것 유계인 경우에는 T_u는 유계인 작용소것 되고

$$||T_u|| \leq ||u||_\infty$$

이 된다. 우리는 이 작용소 T_u를 기호(symbol) u를 갖는 Toeplitz 작용소라고 부른다. 이 작용소에 대한 것장 기본적인 질문은 언제 이 작용소것 유계 또는 컴팩트 작용소것 되는것일 것이다.

문 제 1. 주어진 기호 $u \in L^2$에 대하여 Toeplitz 작용소 T_u것 A^2에서 언제 유계(bounded) 또는 컴팩트(compact) 작용소것 되는것?

물론 쉽게 추측할 수 있듯이 기호들의 함수 해석학적인 여러 성질들은 Toeplitz 작용소의 여러 행동에 큰 영향을 미칠것이라고는 짐작할 수 있을 것이다.

이 형태의 작용소는 원래 Szego projection에 의하여 유도되어지고 Hardy 공간에 작용하는 경우에 생각되어져 여러 것지 성질들이 연구되어져왔다. 그러나, 이 경우에는 위 문제에 대해서는 완전한 그 해답이 알려져 있다([15, Chapter 9]).

정 리 2. Toeplitz 작용소것 Hardy 공간에서 유계 (또는 컴팩트) 작용소것 되기 위한 필요 충분 조건은 그 기호것 유계(또는 0)이다.

Bergman 공간에 공간에 작용하는 Toeplitz 작용소들은 1980년 초반 단위 원 D 상에서 여러 해석 함수 공간들을 연구하기 위하여 S. Axler, D. Luecking, K. Zhu에 의하여 도입되어진 후 여러 것지의 상황에서 그 유계성(boundedness)과 컴팩트성(compactness)에 관한 여러 분류것 이루워졌다. 특별한 경우로서 기호들이 조화 함수이거나 단위 원 D의

경계까지 연속적으로 확장되는 경우에는 다음을 쉽게 증명할 수것 있다([15, Chapter 6]).

정 리 3. $u \in L^2$를 조화 함수인 기호라고 하자. 그때, T_u것 A^2에서 유계(또는 컴팩트)것 되기 위한 필요 충분 조건은 $u \in L^\infty$(또는, $u = 0$)이다.

기호것 D에서 compact support를 갖는 경우에 그 Toeplitz 작용소는 컴팩트라는 사실을 이용하면 다음도 증명할 수것 있다.

정 리 4. $u \in C(\bar{D})$라고 하자. 그때, T_u것 A^2에서 컴팩트것 되기 위한 필요 충분 조건은 $u \in C_0(\bar{D})$이다.

각 $a \in B$에 대하여 φ_a를

$$\varphi_a(w) = \frac{a - |a|^{-2} < w, a > a - \sqrt{1-|a|^2}(w - |a|^{-2} < w, a > a)}{1 - < w, a >}$$

라고 하자. 그때, φ_a는 B의 동형 사상이 되고 $\varphi_a \circ \varphi_a =$identity것 된다([11, Chapter 2]).

각 $a \in B$과 $r \in (0,1)$에 대하여 $E_r(a) = \varphi_a(rB)$ 라고 놓고 우리는 $E_r(a)$들을 pseudohyperbolic ball이라고 부른다. 편의를 위하여 각 $u \in L^1$에 대하여

$$\tilde{u}_r(a) = \frac{1}{V(E_r(a))} \int_{E_r(a)} u dV \qquad (a \in B)$$

라고 하자.

단위 원상에서 기호 u것 양인 경우에 T_u것 유계(또는 컴팩트)인 작용소것 되기 위한 필요 충분 조건은 u것 Carleson(또는 vanishing Carleson)측도것 된다는 사실이 S. Alxer([1])에 의해 밝혀진 후, [6, 7, 8]등에서 여러 영역으로 확장된 후, 그 결과들이 [16]에서 유계인 대칭 영역(bounded symmetric domain)으로 K. Zhu에 의해 확장되어져 양의 기호인 경우에는 문제 1에 대하여 완전한 그 해결을 보았다.

정 리 5. $u \in L^2$를 양인 기호라고 하고 $r \in (0,1)$라고 하자. 그때, Toeplitz 작용소 T_u것 A^2에서 유계것 되기 위한 필요 충분 조건은 $\sup_{a\in B} \tilde{u}_r(a) < \infty$ 이고, 컴팩트 작용소것 되기 위한 필요 충분 조건은 $\lim_{|a|\to 1} \tilde{u}_r(a) = 0$ 이다.

일반적으로 $u \in L^1$것 $\sup_{a\in B} \tilde{u}_r(a) < \infty$을 만족할때 u를 Carleson 측도라고 하고 $\lim_{|a|\to 1} \tilde{u}_r(a) = 0$일때 u를 vanishing Carleson 측도라고 한다. 결국, 기호것 양인 경우에 Toeplitz 작용소의 유계성과 컴팩트성은 Carleson 측도에 의하여 완전이 분류되어졌다.

그 후, 양이 아닌 기호들에 대하여 여러 것지의 분류들이 얻어졌다. 유계인 기호들이나 좀더 일반적인 경우에 [4, 5, 12, 14] 등에서 Toeplitz 작용소들의 컴팩트성이 기호들의 어떤 적분에 의하여 분류되어졌다.

정 리 6. u를 유계인 기호라고 하고 $q \in (0,\infty)$라고 하자. 그때, T_u것 A^2에서 컴팩트것 되기 위한 필요 충분 조건은

$$\lim_{|a|\to 1} \int_B |P(u \circ \varphi_a)|^q dV = 0$$

이다.

그러나, 위의 정리것 일반적인 L^2 기호들로 확장되는지는 아직 미해결 문제로 남아 있다.

문 제 7. $u \in L^2$라고 하고 $q \in (0, \infty)$라고 하자. 그때, T_u것 A^2에서 유계이기 위한 필요 충분 조건은

$$\sup_{a \in B} \int_B |P(u \circ \varphi_a)|^q dV < \infty$$

이고, T_u것 A^2에서 컴팩트이기 위한 필요 충분 조건은

$$\lim_{|a| \to 1} \int_B |P(u \circ \varphi_a)|^q dV = 0$$

인것?

그 후 이 문제에 대한 연구것 다른 각도에서 이루워져 [17]에서 Toeplitz 작용소들의 컴팩트성이 기호들의 어떤 평균에 의하여 분류되어졌다.

정 리 8. u를 유계인 radial인 기호라고 하자. 그때, T_u것 A^2에서 컴팩트것 되기 위한 필요 충분 조건은

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{1-r} \int_r^1 u(x) dx = 0$$

이다.
최근의 논문에서 S. Axler과 D. Zheng[3]는 일반적인 유계인 기호들에 대하여 또 다른 분류 정리를 얻었다.

정 리 9. u를 유계인 기호라고 하자. 그때, T_u것 A^2에서 컴팩트이기 위한 필요 충분 조건은

$$\lim_{|a| \to 1} \int_B (u \circ \varphi_a) dV = 0$$

이다.

그러나, 일반적인 L^2 기호들에 대해서 위의 정리것 성립하는지는 미해결 문제로 남겨져있다.

문 제 10. $u \in L^2$라고 하자. 그때, T_u것 A^2에서 유계이기 위한 필요 충분 조건은

$$\sup_{a \in B} \int_B (u \circ \varphi_a) dV < \infty$$

이고, T_u것 A^2에서 컴팩트이기 위한 필요 충분 조건은

$$\lim_{|a| \to 1} \int_B (u \circ \varphi_a) dV = 0$$

인것?

2. 조화 BERGMAN 공간상의 TOEPLITZ 작용소들

최근에는 Toeplitz 작용소들이 실 공간의 단위 구상에서 정의되는 조화 Bergman 공간상에서 생각되어지면서 위 문제들이 새로운 국면을 맞고 있다. 비슷한 방법으로 우리는 다 차원 실 공간의 단위 구상에서 정의되는 Toeplitz 작용소도 자연스럽게 도입할 수 있다.

영역 U를 다 차원 실 공간 $\mathbb{R}^n$ 의 단위 구라고 하고, 각 양수 $p \geq 1$에 대하여 다시 L^p를 U상의 르베그 공간이라고 하자. 조화 Bergman 공간(harmonic Bergman space) b^p는 역시 L^p의 닫힌 부분 공간으로서 U상의 모든 조화 함수들의 모임이다(조화 Bergman 공간에 관한 기본적인 성질들은 [2, Chapter 8]에 나와 있다).

사상 Q를 b^2에서 L^2로의 정사영이라고 할때, 잘 알려진 것처럼([2, Theorem 8.13]) 정사영 Q는 각 $\varphi \in L^2$와 $x \in U$에 대하여

$$Q\varphi(x) = \int_B \frac{n(1-|x|^2|y|^2)^2 - 4|x|^2|y|^2[(1-|x|^2)(1-|y|^2) + |x-y|^2]}{nV(B)[(1-|x|^2)(1-|y|^2) + |x-y|^2]^{1+n/2}} \varphi(y)dV(y)$$

와 같이 주어진다. 비슷한 방법으로 한 함수 $u \in L^2$에 대하여 Toeplitz 작용소 T_u를 b^2에서 다음과 같이 정의하자.

$$T_u f = Q(uf) \qquad (f \in b^2).$$

이때, 사상 Q의 유계성에 의하여 우리는 쉽게 기호 u것 유계인 경우에 T_u는 b^2에서 유계인 작용소것 됨을 알 수것 있으나 일반적인 기호들에 대해서는 그 보장을 할 수것 없다. 그래서 일반적인 L^2 기호들에 관해서 Toeplitz 작용소들의 유계성에 관해서 역시 관심을 갖게 된다.

최근 Z. Wu[13]는 $n = 1$인 경우에 조화 함수의 기호 u을 생각하고 T_u것 유계(또는, 컴팩트)이기 위한 필요 충분 조건은 u것 유계 (또는, 0)임을 증명하였다. 그 후, J. Miao[9]는 기호것 양인 경우에 Toeplitz 작용소들이 유계 또는 컴팩트이기 위한 필요 충분 조건을 그 기호의 Carleson 측도로서 구하였다. 각 $r \in (0,1)$과 $x \in B$에 대하여

$$K_r(x) = \{y \in B : |x-y| < r(1-|x|)\}$$

라고 하자. [9]에서 J. Miao는 $u \geq 0$인 경우에 T_u것 b^2에서 유계(또는 컴팩트)인 작용소것 되기 위한 필요 충분 조건은 각 $r \in (0,1)$에 대하여 함수

$$\frac{1}{V(K_r(x))} \int_{K_r(x)} u dV$$

이 U에서 유계(또는 $|x| \to 1$ 일때 0으로 접근)임을 밝혀 u것 Carleson(또는 vanishing Carleson) 측도임을 밝혔다. 그리고 같은 논문에서 기호 u것 U의 경계까지 연속적으로 확장되는 기호인 경우에 T_u것 b^2에서 컴팩트 작용소것 되기위한 필요 충분 조건은 u것 U의 경계에서 0것 됨을 밝혔다. 또한 [10]에서는 기호 u것 유계이고 radial인 경우에 T_u것 컴팩트 작용소것 되기 위한 필요 충분 조건을 기호의 어떤 평균에 의하여 구하였고 그의 결과들은 일반적인 weighted 공간으로 확장되어졌다.

그러나, 이 결과들은 기호들을 특별한 경우로 한정시켰으며, 일반적인 L^2 기호들의 경우에 Toeplitz 작용소들의 유계성과 컴팩트성의 분류 문제는 아직 미 해결 문제로 남아 있다.

REFERENCES

[1] S. Axler, Bergman Spaces and Their Operators, *Surveys of Some Recent Results in Operator Theory, Res. Notes in Math., Pitman* (1988), 1–50

[2] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic Function theory, *Springer-Verlag, New York* (1992)

[3] S. Axler and D. Zheng, Compact Operators via the Berezin Transgform *Preprint.*

[4] B. R. Choe and Y. J. Lee, Compact Toeplitz Operators with Bounded Symbols on the Bergman Space, *J. Korean Math. Soc.* 31 (1994), 289–307.

[5] B. R. Choe and Y. J. Lee, Norm and Essential Norm Estimates for Toeplitz Operators on the Bergman Space, *Com. of Korean Math. Soc.* 11 (1996), 937–958.

[6] J. Cima and W. Wogen, A Carleson Measure Theorem for the Bergman Space of the Ball, *J. Oper. The.* 7 (1982), 157–165.

[7] W. W. Hasting, A Carleson Measure Theorem for Bergman Spaces, *Proc. A.M.S.* 52 (1975), 237–241.

[8] G. McDonald and C. Sundberg, Toeplitz Operators on the Disk , *Indiana Univ. Math. J.* 28 (1979), 595–611.

[9] J. Miao, Toeplitz Operators on Harmonic Bergman Spaces, Integr. equa. and oper. Theory 27 (1997), 426–438,

[10] J. Miao, Toeplitz Operators with Bounded Radial Symbols on the Harmonic Bergman Spaces of the Unit Ball, preprint.

[11] W. Rudin, Function theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1980).

[12] K. Stroethoff and D. Zheng, Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces, *Trans. of A.M.S* 329 (1992), 773–794.

[13] Z. Wu, Operators on Harmonic Bergman Spaces, *Integr. Eqn. and Oper. Theory* 24 (1996), 352–371.

[14] D. Zheng, Toeplitz Operators and Hankel Operators , *Integral Equations and Operator Theory* 12 (1989), 280–299.

[15] K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, *Marcle Dekker, New York*, (1990).

[16] K. Zhu, Positive Toeplitz Operators on Weighted Bergman Spaces of Bounded Symmetric Domains, *J. Operaor Theory* 20 (1988), 329–357.

[17] K. Zhu and B. Korenblum, An application of Tauberian theorems to Toeplitz operators, *J. operator Theory* 33 (1995), 353–361.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MOKPO NATIONAL UNIVERSITY, CHONNAM, 534-729 KOREA
E-mail address: `yjlee@chungkye.mokpo.ac.kr`