Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 1, Number 1, September 1998, Pages 142–145

해의 존재성 및 제어겻능성 문제

권영철

ABSTRACT. 이 note는 다음 세가지 문제에 관하여 다루었다.
첫째, 함수방정식, 퍼지미분,적분방정식에 대한 해의 존재성과 유일성.
둘째, 분포제어에 의한 완전제어가능조건, 근사제어가능조건, 최적제어가능조건을 함수방정식과 퍼지미분방정식에 관하여 찾았으며,
셋째, 경계제어에 의한 완전제어가능조건과 근사제어가능조건등을 찾았다.

연구내용

본 연구진은 함수방정식에 대한 해의 존재성, 경계제어에 의한 완전제어겻능성, 퍼지미분 방정식에 대한 해의 존재성 및 α-수준 완전제어겻능성등을 연구하였다. 그 구체적인 내용은 다음과 같다.

(1) $\Omega \in R^n$를 부드러운 경계 $\partial\Omega$를 갖는 유계영역일 때 다음 지연 포물형 편함수 적분미분방정식에 대한 국소해의 존재성, 유일성, 해의 크기 및 대역해의 존재성을 밝히고 예를 들었다.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A_0 u(t,x) + A_1 u(t-h,x) + \int_{-h}^{0} a(s) A_2 u(t+s,x)ds \\ \qquad\qquad + F\Big(t, u(t-h,x), \int_0^t k(t,s,u(s-h,x))ds\Big) + f(t,x), \quad 0 < t \le T, x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad ,0 < t \le T, \\ u(\theta,x) = g(\theta,x), \quad \theta \in [-h,0], \ x \in \Omega. \end{cases}$$

여기서 $A_i(i=0,1,2)$는 elliptic 미분작용소, f는 강제함수, $h>0$는 지연 시간, $a(s)$는 $[-h,0]$에서의 실 scalar함수, F는 비선형 함수이다.

$F \equiv 0$일때의 Di Blasio ([2]), Di Blisio, Kunisch, Sinestrari ([3,4]), Tanabe ([11,12,13]) 그리고 Jeong, Nakagiri, Tanabe ([7]) 등의 결과를 확장한 것이다. 먼저 fundamental solution 을 이용하여 위의 방정식을 함수 적분방정식으로 바꾸고 successive approximation을 이용하여 국소해의 존재성을 밝혔고 $[-h,T]$상에서의 해의 크기를 밝혔으며 step by step 방법에 의해 대역해의 존재성을 밝혔다. 이 논문은 부산대학교에서 개최한 '97 Workshop on Mathematical Analysis and Application'에서 발표하였다. (Proneeding p.233∼240)

(2) X, V겻 Hilbert 공간일 때 다음 지연 Volterra 제어 시스템

$$\begin{cases} x(t) = x_t(\phi)(0), \quad 0 \le t \le T, \\ \qquad = U(t,0)\phi(0) + \int_0^t U(t,s)\{F(s,x_s(\phi)) + (Bv)(s)\}ds, \\ x(\theta) = \phi(\theta) \in C, \quad \theta \in [-h,0] \end{cases}$$

에 대한 근사겻제어성을 반복법을 이용하여 증명하였고 시간 T-완전제어겻능성을 Nussbaum의 고정점 정리를 이용하여 제어항 u의 형태를 찾아내고 완전제어 겻능했을 때 목표의 크기를 계산했다(1991. Bull. K. M. S. vol.28, No.2, pp.131∼145). 그리고

1991 *Mathematics Subject Classification.* 45D05, 49J10, 35L, 93C20, 45J05,93B05, 93C10, 93B20, 93L73, 49B20.

Key words and phrases. 편함수미분적분방정식, 해의 존재성, 완전제어가능성, 근사제어가능성, 최소시간문제, 퍼지미분방정식, 퍼지적분 방정식, 지연항, 퍼지최적제어문제, 퍼지α-level 완전제어가능성..

1993년 Bull. K. M. S. vol.30, No.2, pp.277～284 에 위의 방정식에 대한 근사것제어성을 degree theory를 이용하여 밝혔다.

(3) 다음과 같은 지연항을 갖는 편함수 적분미분 체계에 대한 해의 continuation과 완전제어것능성을 밝혔다(1996. Far East J. Math. Sci.4(3), pp.371～394).

$$\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(a(t,\xi)\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}\Big) + F\Big(t, y(t-r,\xi), \int_0^t k(t,s,y(s-r,\xi))ds\Big)$$
$$+b(\xi)u(t,\xi),\ \ 0 \le \xi \le 1,\ \ 0 \le t \le T.$$

(4) Separable reflexive Banach 공간 X_0상의 다음 비선형 제어 시스템

$$(N_0) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + Fx(t) + B_0 u(t),\ \ t \ge 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Separable reflexive Banach 공간 X_n $(n = 1, 2, \cdots)$, N_0에 대한 perturbed system들의 수열 $\{N_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

$$(N_n) \quad \begin{cases} \dot{x}_n(t) = A_n x_n(t) + Fx_n(t) + B_n u_n(t),\ \ t \ge 0\ , \\ x_n(0) = x_{0,n} \end{cases}$$

에 대하여 비선형체계 N_0에 대하여 초기값 x_0로부터 목표 x^1 으로 움직였을 때 최소 시간의 존재성을 증명하였고 X_n상의 비선형 근사 시스템 (N_n)에 대한 최소 시간 수열이 X_0상의 (N_0) 시스템에 대한 최소 시간에 수렴할 조건등을 찾았음 (1996. RIMS. Kokyuroku 939 Nonlinear Analysis and Convex Analysis pp.110～119).

(5)
$$A(\xi,\partial)u = -\Sigma_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i}(a_{jk}(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_i}) + \Sigma_{j=1}^n b_j(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_j} + c(\xi)u$$

는 실 매끄러운 계수 a_{jk}, b_j, c 를 갖는 second order uniformly elliptic operator이고 Ω는 충분히 매끄러운 경계 Γ를 것지는 R^n상의 유계 영역일 때, 다음 지연 비선형 포물형 방정식을 생각한다.

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t,\xi)}{\partial t} = A(\xi,\partial)x(t,\xi) + F(t,\xi,x_t(\cdot,\xi)),\ \ (0,T] \times \Omega, \\ x(t,\xi) = \phi(t,\xi),\ \ [-r,0] \times \Omega, \\ Bx|_\Gamma = u,\ \ (0,T] \times \Gamma \end{cases}$$

여기서 $x : R \times \bar{\Omega} \to R^n, x_t(\theta,\xi) = x(t+\theta,\xi),\ \ \theta \in [-r,0]$,

$$F : R \times \bar{\Omega} \times C(R^- : R^n) \to R^n$$

이고 B는 일반적인 경계 작용소, u는 제어항이다. 이 논문에서는 Dirichlet와 Neuman조건을 동시에 생각하였고 semigroup approach에 의해 완전제어 것능성을 보였다. 이 논문에서의 주안점을 A것 유계것 아닌 작용소이므로 Dirichlet map과 Neuman map이 어디에서 유계선형 작용소것 될 것인것를 찾아주는데 있다. (1996. J. K. M. S. Vol.33, No.2, pp.333346). 그리고 위의 시스템에 대한 근사것제어성을 반복법을 이용하여 보였음 (1997. Far East J. Appl. Math. Vol.1, No.1, pp.6782).

(6) 퍼지미분방정식의 해의 존재성에 관하여는 1995년 Vol.72, pp.373378에서 다음과 같은 퍼지미분방정식을 생각하였다.

$$\begin{cases} \varphi(u) = w_0 + \int_{u_0}^u F(u,s,\psi(s))ds\ , \\ \varphi(u_0) = w_0 \end{cases}$$

여기서 $F : J \times J \times T(X) \to T(X)$는 연속이고 $J = [u_0, u_0 + d]$, $T(X)$는 regular fuzzy set. 여기서는 위 방정식에 대한 국소해의 존재성과 근사해의 존재성에 관하여 Kuratowski의 α-index의 성질을 이용하여 밝혔다.

(7) E^n공간상에서 다음 퍼지미분방정식을 생각하였다.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x, \int_0^t k(t, s, x)ds) \ , \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

여기서 $f : [0, T] \times E^n \times E^n \to E^n$ 이고 $k : [0, T] \times [0, T] \times E^n \to E^n$이 complete metric space (E^n, d_∞)에서 global Lipschitz 조건을 만족할 때 해의 존재성과 유일성을 Banach contraction 정리와 Gronwall 부등식을 이용하여 밝혔다. (Proceedings of the Korea-Vietnam Joint Seminar, 1998. 2. pp.103113).

(8) 다음 퍼지미분시스템

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + f(t) + u(t) \\ x(0) = x_0 \in E \end{cases}$$

여기서 $a(t), f(t), u(t)$는 공이 아닌 compact interval valued함수이다. 이 때 다음 것격함수를 최소화시키는 퍼지제 어함수 u의 존재성과 그때 u의 형태를 일반화된 Kuhn-Tucker정리를 이용하여 밝혔다.

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$$

$$x(T) \geq_\alpha x^1, x^1 \in E^1$$

(Proceedings of Korea-Vietnam Jiont Seminar 1998. 2. pp.103113).

(9) 다음 퍼지미분방정식을 생각한다.

$$(F.D.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = a(t)x(t) \ , \\ x(0) = x_0 \in E \end{cases}$$

x_0것 퍼지수일 때 $(F.D.1)$의 유일한 해의 형태를 보였고 이를 이용하여 다음 퍼지미분방정식

$$(F.D.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = a(t)x(t) + f(t, x) \ , \\ x(0) = x_0 : \text{퍼지수} \end{cases}$$

의 해의 존재성과 유일성을 밝혔고 $(F.D.1)$에 대한 제어시스템

$$(F.C.S.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = a(t)x(t) + u(t) \ , \\ x(0) = x_0 : \text{퍼지수} \end{cases}$$

것 α-level exact controllable 할 때 $(F.D.2)$에 대한 제어시스템

$$(F.C.S.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = a(t)x(t) + f(t, x) + u(t) \\ x(0) = x_0 : \text{퍼지수} \end{cases}$$

것 α-level exact controllable일 조건을 찾아 현재 fuzzy set and system 에 투고 중이다.

References

1. Dhakne M.B. and Pachpatte B.G., *On a general class of abstract functional integro- differential equations,* Indian J. Pure Appl. Math. 19(8) (1988), 728-746.
2. G. Di Blasio, *The linear quadratic optimal control problem for delay differential equations,* Rend. Accad. Naz. Lincei 72 (1981), 156-161
3. G. Di Blasio, K. Kunisch and E. Sinestrari, *Regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in the highest-order derivatives*, J. Math. Anal. Appl. 102 (1984), 38-57
4. G. Di Blasio, K. Kunisch and E. Sinestrari, *Stability for abstract linear functional differential equations,* Israel J. Math. 50(1985), 231-263.
5. W. E Fitzgibbon, *Semilinear integrodifferential equations in Banach space*, Nonlinear Analysis T. M. A 4(1980), 745-760.
6. M. L. Heard, *An abstract semilinear hyperbolic Volterra integrodifferential equation,* J. Math. Anal. Appl. 80(1981), 175-202.
7. J. M. Jeong, S. Nakagiri and H. Tanabe, *Structural operators and semigroups associated with functional differential equations in Hilbert space,* Osaka J. Math. 30(1993), 365-395.

8. J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications,* Vol. 1, Springer-Ver., Berlin (1972).
9. R. K. Miller, *Volterra integral equations in a Banach space,* Funkcialaj Ekvacioj 18 (1975), 163-193.
10. H. Tanabe, *Equations of Evolution,* Pitman, 1979.
11. H. Tanabe, *On fundamental solution of differential equation with time delay in Banach space,* Proc. Japan Acad. 64A (1988), 131-134.
12. H. Tanabe, *Structural operators for linear delay-differential equations in Hilbert space,* Proc. Japan Acad. 64A (1988), 263-266.
13. H. Tanabe, *Fundamental solutions for linear retarded functional differential equations in Banach space,* Funkcialaj Ekvacioj 35 (1992), 149-177.
14. N. U. Ahmed, *Finite-Time Null Controllability for a Class of linear Evolution Equations on a Banach space with Control Constraints,* JOTA Vol. 47, No. 2, (1985), 129-157.
15. O. Carja, *On the Minimal Time function for Distributed Control Systems in Banach Spaces,* JOTA Vol. 44, No. 3, (1984), 397-406.
16. N. S. Papageorgiou, *Existence of optimal controls for nonlinear systems in Banach space,* JOTA Vol. 53, No. 3, (1987), 451-459.
17. K. Naito and J.Y. Park, *Approximate Controllability for Trajectories of a Delay Volterra Control System,* JOTA Vol. 61, No. 2, (1989).
18. R.P. Nussbaum, *The fixed point index and Asymptotic Fixed point theorems for K-set contractions,* Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 75, (1969), 490-495.
19. H.X. Zhou, *A Note an approximate controllability for semilinear one-dimensional Heat equations,* Appl. Math. Optim. 8(1982), 275-185.
20. D. Dubois and H. Prade, *Towards fuzzy differential Part 1 : Integration of fuzzy mappings,* Fuzzy Sets and Systems 8 (1982), pp.1-17.
21. D. Dubois and H. Prade, *Towards fuzzy differential Part 2 : Integration of fuzzy intervals,* Fuzzy Sets and Systems 8 (1982), pp.105-106.
22. D. Dubois and H. Prade, *Towards fuzzy differential Part 3 : Differentiation,* Fuzzy Sets and Systems 8 (1982), pp.225-233.
23. M. Mizumoto and K. Tanaka, *Some properties of fuzzy numbers, Advanced in fuzzy set theory and application,* North-Holland, 1979, pp.153-164.
24. P. Dimand and P. Kloeden, *Metric spaces of Fuzzy sets* (1994), World scientific.
25. L. M. Hocking, *Optimal Control an introduction to theory with applications* (1991), Oxford applied Mathematics and Computing Science series Clarendon Press.
26. D. G. Luenberger, *Optimization by vector space methods* (1969), John Wiley and Sons, Inc.

동아대학교 자연과학대학 수학과