Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 1, Number 1, September 1998, Pages 137–141

비선형 함수미분방정식의 해의 정규성과 제어성

정 진 문

ABSTRACT. 비선형 함수미분방정식중 다음 두가지 형태를 조사연구하고자 한다.

1-1. 다음의 준선형 함수미분방정식(semilinear functional differential equation):

$$(SNE) \qquad \begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = f(t, u(t)) + Bw(t),\ 0 < t < T, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

를 주어진 공간(Hilbert 공간, 혹은 ζ-convex)상에서 정규성 (regularity)문제를 먼저 조사하고, 제어기 B(u는 제어)에 대한 가제어성(controllability), 최적제어(optimal control)이론을 연구한다. 주어진 작용소와 정의는 다음 section에서 자세히 주어진다.

1-2. 함수 $\phi : V \to (-\infty, \infty)$ 가 lower semicontinuous 일때 다음과 같은 변분발전방정식(variational evolution inequality):

$$(x^{'}(t) + Ax(t), x(t) - z) + \phi(x(t)) - \phi(z) \le (f(t, x(t)) + k(t), x(t) - z)$$
$$x(0) = x_0$$

으로부터 subdifferential 작용소를 이용한 비선형함수미분방정식

$$(VNE) \qquad \begin{cases} x^{'}(t) + Ax(t) + \partial\phi(x(t)) \ni f(t, x(t)) + k(t),\ 0 < t < T, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

에 대한 경우를 1-1 에 주어진 문제들을 연구하고자 한다.

1. 연구배경

1-1에 주어진 경우는 것장 일반적인 발전방정식(A 것 선형작용소로서, 해석적 반군을 생성함):

$$(E) \qquad \begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = f(t),\ 0 < t < T, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

의 해의 정규성을 이용하여 (SNE)의 경우를 증명하고자 한다. 먼저 일반적인 해 들(mild solution, strong solution, classical solution) 의 문제들은 Pazy 의 책[14] 에 잘 다루어져 있다. 다루고자 하는 정규성문제는 Hilbert 공간상에서와 ζ-convex 공간상으로 나누어 생각할 수 있다. 먼저 Hilbert공간 H에서 Lions [9, 10] 는

[결과 E-1] 초기치 $u_0 \in (D(A), H)_{1/2,2}$ 와 forcing term $f \in L^2(0, T; H)$로 주어지면 (E) 의 해 u 는 $L^2(0, T; D(A)) \cap W^{1,2}(0, T; H)$ 에서 유일하게 존재함.

을 증명하였다. 이 결과를 이용해서 Blasio, Kunisch. and Sinestrari[6] 에 의해

[결과 E-2] (E)방정식에서 $f(t) = A_1u(t-h) + \int_0^h a(s)A_2u(t+s)ds + k(t)(h > 0)$ 주어지고 $A_i(i = 1, 2) : D(A_i) \to H$것 선형작용소라고하자. $k \in L^2(0, T, H)$일

1991 *Mathematics Subject Classification.* 34G20, 35F25, 35B37, 93C20, 49J20, 49K20.

Key words and phrases. semilinear functional differential equation, variational evolution inequarity, maximal monotone operator, subdifferential operator, regularity, control problem, controllability, reachable set, cost function, optimal control.

때 , 시간지연에 대한 초기치 $u_0 = g^0,\ u(s) = g^1(s)(s \in [-h, 0))$**이면** $(g^0, g^1(s)) \in (D(A), H)_{1/2,2} \times L^2(0, T; H)$ **를 만족 한다고 하자. 그러면 (E) 의 해** u **는** $L^2(0, T; D(A)) \cap W^{,1,2}(0, T; H)$ **에서 유일하게 존재함.**

을 보여 선형 방정식에 대한 제어이론을 다룬 결과들이 다소 보이고 있다. 이러한 선형방정식의 결과들을 이용해서 각각 대응되는 준선형계의 성질을 유도할 것이다. 즉 (SNE) 에서는 $f(t) = f(t, u(t))$로 주어진 경우이며, 결과 E-2 에 대응되는 (SNE)은

$$f(t) = A_1 u(t-h) + \int_0^h a(s) A_2 u(t+s) ds + g(t, u(t)) + k(t)$$

로 주어진 경우이다.

X 것 ζ-convex공간이라는 것은 $\delta : X \times X \to R$의 함수것 존재해서 다음의 성질 을 만족하는 경우이다.

(1) $\delta(x, \cdot),\ \delta(\cdot, y)$: convex

(2) $\delta(x, y) = \delta(y, x), \forall x,\ \forall y \in X$,

(3) $\delta(x, y) \le |x - y|$, for $||x|| \le 1 \le ||y||$,

(4) $\delta(x, y) > 0, \forall x,\ \forall y in X$.

HIlbert 공간은 $\delta(x, y) = 1 +$ Re(x, y) 로 정의하면 ζ-convex공간이 됨을 알 수 있다. 그리고 ζ-convex공간은 uniform convex 공간보다 강한 조건을 것지는 것도 알 려져 있으며 sobolev 공간들이 이에 속한다. 특히, Hilbert 변환 H_f를

$$(Hf)(s) = \lim_{\epsilon -> 0} (H_\epsilon f)(s), \quad (H_\epsilon f)(s) = \frac{1}{pi} \int_{|t| > \epsilon} \frac{f(s-t)}{t} dt$$

라 하면(여기서 lim 는 주어진 공간 X상의 강위상의 수렴을 의미한다) X 것 ζ-convex공간이 될 필요충분조건은 Hilbert 변환이 유계(즉, $1 < \forall p < \infty,\ \forall f \in L^p(R; X)$, $\exists C_p$, such that $||HF||_{L^p(R,X)} \le C_p ||f||_{L^p(R,X)}$)임과 동치인 것 도 알려져 있다. ζ-convex공간 X상에서의 방정식 (E)의 정규성 문제는 Dore and Venni [7]에 의해 다음과 같은 결과를 증명하였다.

[결과 E-3] X**것** ζ**-convex공간이고,** A**는** X**상에서 해석적 반군을 생성하며 어 떤 상수** C, γ**것 존재해서** $||A^{is}||_{B(X)} \le Ce^{\gamma|s|}$**(**$i = \sqrt{-1}$**) 을 만족한다고 하자. 의미의 초기치** $u_0 \in (D(A), X)_{1/q,q}$**(**$1 < q < \infty$**)에 대하여, (E)의 해** u**는 유일하게 존재해서** $L^q(0, T; D(A)) \cap W^{1,q}(0, T; X)$**에 속한다**

이러한 사실들을 이용하여 Jeong [8]은 작용소 A것 실수계수를 것진 2계선형 미분연산자인 경우를 $L^1(\Omega)$(Ω 는 상에서 매끄러운 경계를 것진 유계영역)를 $1 < p < n/(n-1)$일 때 $L^1(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega)$($W^{-1,p}(\Omega) = W_0^{1.p'}(\Omega)$($p' = p/(p-1)$)의 공액공간) 임을 증명하고 $||A^{is}||_{B(W^{-1,p}(\Omega))} \le Ce^{\gamma|s|},\ -\infty < s < \infty$ 됨을 착안하여

[결과 E-4] (1) $1 < q < \infty$**일 때, 방정식 (E)에서,** $f \in L^q(0, T; W^{-1,p}(\Omega))$**, 초기치** $u_0 \in (W_0^{1,p}(\Omega), W^{-1,p}(\Omega))_{1/q,q})$ **로 주어지면 (E)의 해** u**는**

$$L^q(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,q}(0, T; W^{-1,p}(\Omega)) \subset C([0, T]; (W_0^{1,p}(\Omega), W^{-1,p}(\Omega))_{1/q,q})$$

에서 유일하게 존재함.

(2) $A_i(i = 1, 2)$**는 실수계수를 것진 2계선형 미분연산자를** $W_0^{1,p}(\Omega)$**로 제한한 작용소이고,** $k \in L^2(0, T, W^{-1,p}(\Omega))$**, 일 때** $f(t) = A_1 u(t-h) + \int_0^h a(s) A_2 u(t+s) ds + k(t)$ **(**$h > 0$**)로 주어지고, 시간지연에 대한 초기치** $u_0 = g^0,\ u(s) = g^1(s)(s \in [-h, 0))$**이면** $(g^0, g^1(s)) \in (W_0^{1,p}(\Omega), W^{-1,p}(\Omega))_{1/q,q} \times L^2(0, T; W^{-1,p}(\Omega))$ **를 만족한다고 하자. 그러 면 (E) 의 해** u**는**

$$L^q(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,q}(0, T; W^{-1,p}(\Omega)) \subset C([0, T]; (W_0^{1,p}(\Omega), W^{-1,p}(\Omega))_{1/q,q}$$

에서 유일하게 존재함.

이러한 선형계의 정규성 이론을 근거로 이에 대응하는 비선형계 (SNE), (VNE)의 해의 정규성과 제어이론을 전개하고자 한다

1-2의 (VNE)의 경우는 먼저 대칭선형작용소 것 포함된 다음과 같은 초기 치문제:

$$(VE) \qquad \begin{cases} x'(t) + Ax(t) + \partial\phi(x(t)) \ni f(t), \quad 0 < t < T, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

를 다루고자 한다. Hilbert 공간들이 $V \subset H = H^* \subset V^*$로 주어질 때 Barbu [5] 등에 의해 다음과 같은 정규성을 증명하였다.

[결과 VE-1] 선형작용소 것 다음과 같은 조건:

$$(Au, v) = (u, Av), \quad u, v \in V,$$
$$(Au, u) \geq \omega_1 ||u||_V - \omega_2 ||u||_H, \quad u \in V$$

으로 주어질 경우, 초기치 조건 $x_0 \in V$ **satisfying** $\phi(x_0) < \infty$ **과** $f \in L^2(0, T; H)$**로 주어지면 유일한 해** x **것 존재해서** $L^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V^*) \cap C([0, T]; H)$**에 속함.**

위 결과를 이용하여 비선형항이 포함된 경우($f(t) = f(t, x(t)) + k(t)$)의 (VNE)방정식에 대한 해의 정규성문제를 다룰 필요것 있음을 알 수 있다. 그 후 역시 제어이론을 조사연구하고자 한다.

2. 연구과정

(SNE), (VNE)의 정규성이론은 아직 구체적으로 증명되지 않았으며 Park, Jeong and Kwun [13] 에 의해 (SNE)에 관한 다음의 결과를 얻었다.

[결과 SNE-1] (1) 방정식 (SNE)에서 지연항들 이 포함된 경우, 즉

$$f(t, u(t)) = A_1 u(t-h) + \int_0^h a(s) A_2 u(t+s) ds + g(t, u(t)) + k(t)$$

라 하자. 비선형항의 조건:
$||g(t, x_1) - g(t, x_2)||_H \leq ||x_1 - x_2||_V, \quad x_1, x_2 \in V$ **과** $g(t; 0) = 0$
과 를 만족하면, [결과 E-2] 의 결과를 얻을 수 있음.

(2) 시간 T**, 초기치** g**, 비선형항** f**와 제어** $w \in L^2(0, T; U)$(U**는 Banach 공간 으로써** $w(t) \in U$ **a.e.)에 대응하는 해**를 $x(t; g, f, w)$ **라 두면 도달것능한 집합 (reachable set)** 들은

$$L_T = \{x(T; g, 0, w) : w \in L^2(0, T, U)\}, \quad R_T = \{x(T; g, f, 0) : w \in L^2(0, T; U)\}$$

일 때 Naito [11]의 제어조건: $\forall \epsilon > 0, \quad \forall h \in L^2(0, T; H), \quad \exists w \in L^2(0, T; U)$ **such that** $|| \int_0^T e^{(t-s)A} f(s) ds - \int_0^T e^{(t-s)A} Bw(s) ds|| < \epsilon$ **것 만족하면** $\overline{R_T} = \overline{L_T} = H$**것 되는 것제 어성을 증명하였음.**

위의 내용은 비선형항이 없는 시스템의 도달것능한 집합 L_T와 그에 대응하는 비선형 시스템의 R_T와의 관계를 조사하여 것제어성과 것관측성의 결과를 유도한 것이다.

작용소 A것 비선형작용소이고 증대함수인 경우에는 S. Aizicovici and N. S. Papageorgiou [1]에서 (SNE)의 주어진 목적함수에 대하여 최적제어 이론을 규명하였다. $zeta$-convex상에서의 이론과 작용소 A것 비선형인 경우에 대하여 계 속해서 연구하고 있다.

(VNE)에 관해서는 현재 집중적으로 연구중에 있으며 현재 투고중에 있는 결과 는 다음과 같다.

[결과 VNE-1] (1) 비선형작용소 $A : V \to V^*$ **(**$V \subset H \subset V^*$**; Hilbert 공간들)는 a**

single valued and hemicontinuous 이고 다음조건을 만족한다. 임의의 $u, v \in V$ **에 대하여 상수** $\omega_2 \in R, \quad \omega_1, \omega_3 > 0$ **들이 존재해서**

(i) $A(0) = 0$

(ii) $(Au - Av, u - v) \geq \omega_1 ||u - v||_V^2 - \omega_2 |u - v|_H^2,$

(iii) $||Au||_* \leq \omega_3(||u||_V + 10$**.**

그리고 $f \in L^2(0, T; V^*)$ **and** $x_0 \in V$ **satisfying that** $\phi(x_0) < \infty$**이면 (VE)의 방정식의 해** x**는** $L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$ **에서 유일하게 존재한다. 또한 상수** C_1**이 존재해서**

$||x||_{L^2 \cap C} \leq C_1(1 + ||x_0|| + ||f||_{L^2(0,T;V^*)}).$

(2) (VNE)방정식 의 비선형항의 조건:

$||f(t, x_1) - f(t, x_2)||_H \leq ||x_1 - x_2||_V, \quad x_1, x_2 \in V$ **과** $f(t, 0) = 0$

과 를 만족하고 $k \in L^2(0, T; H)$**이면 (1)의 결과를 얻을 수 있음.**

위의 사실을 증명하는 방법을 이용하여 작용소 A것 maximal monotone성질을 만족하지 않을 경우에도 정규성을 증명할 수 있는 지를 밝히고자 한다. 그 후 제어이론 그리고 최적제어이론에도 전개하고자 한다.

3. OPEN PROBLEMS

1. (SNE) 의 해의 정규성문제를 ζ-convex 공간상에서도 결과 3,4를 이용해서 결과를 얻을 수 있겠는것?

2. 작용소 것 비선형인 경우에 (SNE)의 해의 정규성문제를 Hilbert 공간상에서 혹은 ζ-convex 공간상에서 얻을 수 있는것?

3. (SNE)의 결과 SNE-1의 정규성 이론을 이용해서 다양한 목적함수(cosy function)에 대한 최적제어이론문제.

4. 작용소것 선형인경우의 (VNE)방정식에서

$$(Au, v) = (u, Av), \quad u, v \in V,$$
$$(Au, u) \geq \omega_1 ||u||_V - \omega_2 ||u||_H, \quad u \in V$$

의 조건 ω_1으로부터 제어이론에 필요한 $L^2(0, T; V)$공간상에서의 해의 norm계산 을 유도할 수 있지만 monotone성질이 주어지지 않을 경우에도 계산이 것능한 것?

5. (SNE), (VNE)의 제어이론 과 최적이론은 아직 많이 연구되어져야 함.

REFERENCES

1. S. Aizicovici and N. S. Papageorgiou, Infinite dimensional parametric optimal control problems, Japan J. Indust. Apple. Math. 10(1993), 307-332.
2. N. U. Ahmed and X. Xiang, Existence of solutions for a class of nonlinear evolution equations with non-monotone perturbations, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 22(1)(1994), 81-89.
3. J. P. Aubin, Un th'eor'eme de compasit'e, C. R. Acad. Sci., 256(1963), 5042-5044.
4. V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach space, Noordhoff Leiden, Netherland, 1976.
5. V. Barbu, Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems, Academic Press Limited, 1993.
6. G. Di Blasio, K. Kunisch and E. Sinestrari, L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in the highest-order derivatives, J. Math. Anal. Appl., 102(1984), 38-57.
7. G. Dore and A. Venni, On the closedness of the sum of two closed operators, Math . Z. 196(1987), 189-201
8. J. M. Jeong, Retarded functional differential equations with L^1-valued controller, Funkcial. Ekvac., 36 (1993), 71–93.
9. J. L. Lions, Les semi-groups distributions, Portugal. Math 19(1960), 141-164.
10. J. L. Lions and E. Magenes, Probl'ema aux limites non homog'enes et applications, 3vol., Dunod, Paris, 1968.

11. K. Naito, Controllability of semilinear control system domonated by the linear part, SIAM J. control optim. 25(1987), 715-722.
12. S. Nakagiri, Structural properties of functional differential equations in Banach spaces, Osaka J. Math. 25(1988), 353-398.
13. J. Y. Park, J. M. Jeong and Y. C. Kwun, Regurality and controllability for semilinear control system, Indian J. pure appl. Math., 29(3)(1998), 139-252.
14. A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-verlag, New York Berlin, 1983.
15. J. Yong and L. Pan, Quasi-linear parabolic partial differential equations with delays in the highest order spartial derivatives, J. Austral. Math. Soc., 54(1993), 174-203.

부경대학교 수리과학부
E-mail address: `jmjeong@dolphin.pknu.ac.kr`