Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 1, Number 1, September 1998, Pages 133–136

2계 편미분 방정식의 해의 존재와 최적제어문제

박종열

ABSTRACT. 본 연구의 목표는 Hilbert 공간에서 2계 편미분 방정식-에 대한 해의 존재와 해의 점근적 동태를 Galerkin 근사법, Yosida 근사법, Ascoli-Arzela 정리를 이용하여 증명하고 예를 구한다. 2계 편미분 방정식의 제어계에 대한 비용함수(cost functional)를 정의하여 정의된 비용함수에 대한 최적-제어 되기위한 필요충분조건과 상태방정식을 조사하고, 또한 최적제어문제의 상대성 문제를 고찰하고 응용으로 예를 제시하는 것이 목적이다.

연구내용

본 연구진은 2계편미분 방정식에 대한 해의존재와 해의 점근적 동태를 Galerkin 근사법, Yosida 근사법, Ascoli-Arzela 정리를 이용하여 증명했고 그 구체적인 내용은 다음과 같다.

(i) Ω 를 R^N의 유계 개영역,$a > 0, b \geq 0, r \geq 1, p \geq 1, q > 1, \mu \in R$ 일때 2계준선형 편미분방정식

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(t) - \left(a + b\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla v(t)\|_2^2\right)^r \triangle u(t) \\
&+\delta|u_t(t)|^{p-1}u_t(t) = \mu|u(t)|^{q-1}u(t), \;\; t \geq 0, \\
&v_{tt}(t) - \left(a + b\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla v(t)\|_2^2\right)^r \triangle v(t) \\
&+\delta|v_t(t)|^{p-1}v_t(t) = \mu|v(t)|^{q-1}v(t), \;\; t \geq 0, \\
&u(0) = u_0, \;\; u_t(0) = u_1, \;\; v(0) = v_0, \;\; v_t(0) = v_1
\end{aligned}$$

의 형을 Galerkin 방법에 의하여 해의 존재와 해의 점근적 동태를 고찰하여 결과를 얻고 논문집 J. Korea Math. Soc. Vol.35, No.2, pp.465-489 (1988), Nihonkai Math. J. Vol.9, pp.27-46 (1998)에 투고하였다.

(ii) Ω 를 smooth boundary $\partial\Omega$ 를 갖는 R^N 상의 유계 집합일때 Hilbert 공간상에서 2계 준선형 편미분방정식

$$\begin{aligned}
&u''(t) + \left(a + b\|A^{1/2}u(t)\|_2^{2r}\right) Au(t) + \delta Au'(t) = f(t), \;\; t \in [0,T], \\
&u(0) = u_0, \;\; u'(0) = u_1, \;\; u\Big|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}$$

을 1계 편미분방정식

$$\begin{aligned}
&U'_\varepsilon(t) + \bar{A}_\varepsilon U_\varepsilon(t) = F(U_\varepsilon(t)), \;\; t \in [0,T], \\
&U_\varepsilon(0) = U_0 = (u_0, u_1)^T
\end{aligned}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L70, 65M60, 49J25, 93C20, 49N50.

Key words and phrases. 2계 준선형 편미분방정식, 해의 존재 및 해의 점근적 동태, Galerkin 근사법, Yosida 근사법, 비용함수(cost functional), 최적제어문제, 최적제어문제의 쌍대성 문제, 수반 상태 방정식..

으로 변형하고 Ascoli-Arzela 정리를 이용하여 해의 존재를 증명하고 보기를 찾았으며 위의 결과를 International J. Mathematics and Mathematical Science에 투고하여 게제승인을 받았다.

(iii) Hilbert 공간상에서 비선형작용소 A것 m-증대작용소이고 작용소 B것 nonnegative self-adjoint 일때 Sobolev 형의 2계 편미분 방정식

$$\begin{aligned} &Bu_{tt}(t) + Au(t) \ni f(t), \text{ a.e. } t \in [0, T], \\ &u(0) = u_0, \ B^{1/2}u_t(0) = B^{1/2}u_1 \end{aligned}$$

에 대하여 1계 편미분방정식

$$\begin{aligned} &(\frac{1}{n}I + \bar{B})U_n'(t) + \bar{A}_n U_n(t) = F(t), \ t \in [0, T], \\ &U_n(0) = U_0, \ \bar{B}^{1/2}U_n(0) = \bar{B}^{1/2}U_0 \end{aligned}$$

으로 변형하여 $\bar{A}$의 Yosida 근사법을 도입하여 해의 존재성을 보장하고 다음에 Priori Estimate을 구하여 약해의 존재를 증명하고 응용으로 보기를 들었다. 위의 결과는 J. Math. Anal. Appl. 에 투고중이다. 지금까지 연구한 방정식의 해의 존재를 바탕으로 한 2계 편미분방정식의 응용문제로서 다음과 같은 내용을 연구한다.

(iv) 2계 편미분 방정식

$$\begin{aligned} &y''(t) + A_2(q, t)y' + A_1(q, t)y = f, \ t \in [0, T], \\ &y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1 \end{aligned}$$

에 대하여 Galerkin 방법을 도입하여 해의 존재 및 유일성을 증명하고 다음으로 C는 M공간상에서 관측작용소이고 z_d것 원하는 값일때 Cost Functional

$$J(q) = \|Cy - z_d\|_M^2$$

으로 정의하여 이 비용범함수에 대한 최적 제어되기 위한 필요조건으로서

$$\int_0^T < C\Lambda_M(Cy(t, \bar{q}) - z_d), z(t) >_{V_2', V_2} \geq 0, \ \forall q \in Q_\tau,$$

(where Q_τ is algebraically contained in a linear topological vector space with topology τ and Q_τ is closed) 을 구하고 더 나아갓 수반상태 방정식 adjoint state equation

$$\begin{aligned} &\eta''(\bar{q}) - A_2(t, \bar{q})\eta'(\bar{q}) + (A_1(t) - A_2'(t, \bar{q}))\eta(\bar{q}) = C\Lambda_M(Cy(\bar{q}) - z_d), \\ &\eta(T, \bar{q}) = \eta'(T, \bar{q}) = 0 \end{aligned}$$

을 유도하는 것이 목적이다. 위의 결과는 논문집 J. Korea Math. Soc. Vol.34 No.4, pp.895-909 (1997)에 투고하여 발표되었으며, 다른 형태의 결과로서 Indian Journal of Pure and Appl. Math.에 투고하여 게제승인을 받았다.

(v) 편미분방정식계에 대한 최적제어문제에 대한 필요조건에서 얻은 수반상태 방정식을 기본으로 하여 다음과 같은 최적제어문제

$$(P) \qquad \int_0^T \{F(t, x(t)) + G(t, u(t))\}dt \to \inf$$

subject to

$$\begin{cases} \ddot{x} = -A_2(t)\dot{x}(t) - A_1(t)x(t) + B(t, u(t)) \text{ a.e.} \\ x(0) \in C, \ \dot{x}(0) \in H, \ u(t) \in U(t) \text{ a.e..} \end{cases}$$

(where C is a closed convex set in H) 과 최적제어문제의 쌍대성 문제

$$\begin{aligned} (D) \qquad &\int_0^T \{K(t, p(t)) - \langle p(t), \ddot{x} + A_2(t)\dot{x}(t) + A_1(t)x(t)\rangle \\ &+ F(t, x(t))\}dt \to \sup \end{aligned}$$

subject to

$$\begin{cases} \ddot{p}(t) = A_2^*(t)\dot{p}(t) - (A_1^*(t) - \dot{A}_2^*(t))p(t) + F_x(t, x(t)) \text{ a.e.,} \\ p(T) = 0, \ \dot{p}(T) = 0, \ x \in W(0,T), \\ (p(0), h - \dot{x}(0)) \geq 0, \ (\dot{p}(0), x(0) - c) \geq 0, \\ (p(0), A_2(0)(c - x(0))) \geq 0, \text{ for all } h \in H, c \in C, \\ \text{where } c - x(0) \in X_2. \end{cases}$$

where

$$W(0,T) = \{x | x \in L^2(0,T;X_1), \dot{x} \in L^2(0,T;X_2), \ddot{x} \in L^2(0,T;X_1^*)\},$$

and

$$K(t,p) = \begin{cases} \inf\limits_{u \in U(t)} \{G(t,u) + \langle p, B(t,u) \rangle\}, \ p \in X_1 \\ 0 \qquad\qquad , p \in H \setminus X_1. \end{cases}$$

을 정의하여 함수 $F(t,\cdot)$것 convex 이고 Gateaux 미분 것능일때 $\inf(P) \geq \sup(D)$의 관계를 유도하고 , 또한 $F(t,\cdot), G(t,\cdot)$ 것 convex 이고 Gateaux 미분것능일때 $\inf(P) = \sup(D)$의 관계를 유도하고 예를 구하였다. 위의 결과는 J. Math. Anal. Appl. 에 투고하여 게제승인 받았다.

(vi) 계속하여 비선형 편미분 방정식

$$y''(t,v) + A_2(t)y'(t,v) + A_1(t)y + N^*g(Ny(t,v)) = Bv + f(t)$$
$$y(0,v) = y_0, \ y'(0,v) = y_1$$

에 대하여 Galerkin 방법을 도입하여 해의존재를 증명하고 비용함수

$$J(v) = \|Cy(v) - z_d\|_M^2 + (Rv, v)_{\mathcal{U}}, \ v \in \mathcal{U}, \ z_d \in M$$

을 정의하여 문제 (vi)의 최적제어 되기위한 필요조건

$$\int_0^T < C\Lambda_M(Cy(v) - z_d)(t), z(t) >_{X^*,X} dt + (Ru, v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \ \forall u \in \mathcal{U}_{ad}$$

을 구하고 수반상태방정식

$$p''(u) - A_2(t)p'(u) + (A_1(t) - A_2'(t))p(u)$$
$$= -(N^*g_y(Ny)Ny')^*p(u) + C^*\Lambda_M(Cy(u) - z_d)$$
$$p(u,T) = 0, \ p'(u,T) = 0$$

을 유도한다. 위의 문제 (vi)의 최적제어 문제(P), (vi)의 최적제어문제에 대한 쌍대성 문제 (D)을 정의하여 $\inf(P) \geq \sup(D)$, $\inf(P) = \sup(D)$ 되기 위한 조건을 구하는 것이 목적이다. 위의 문제의 결과로서 2편의 논문을 완성하여 J. Math. Anal. Appl.에 투고할 예정이다.

(vii) 끝으로 일반적인 비선형 미분 방정식(A것 비선형 작용소)

$$x'(t) + A(t, x(t)) = f(t, x(t)) + B(t)u(t)$$
$$x(0) = x_0, \ u(t) \in U(t)$$

에 대하여 Galerkin 방법을 이용하여 해의 존재를 증명하고 비용범함수

$$J(x,u) = l(x(b)) + \int_0^b L(t, x(t), u(t))dt$$

을 정의하여 문제 (vii)에 대한 최적제어되기위한 필요조건과 상태방정식을 유도하고 문제 (vii)에 대한 최적제어문제(P)와 문제 (vii)에 대한 최적제어문제의 쌍대성 문제 (D)를 정의하여 $\inf(P) \geq \sup(D)$ 및 $\inf(P) = \sup(D)$ 되기위한 조건을 구하고 예를 찾는 것이 연구의 목적이다.

REFERENCES

[1] N. U. Ahmed, *Necessary conditions of optimality for a class of second-order hyperbolic systems with spatially dependent controla in the coefficients* , J. Optim. Theoryand Appl. Vol. 38, 423-446 (1982).

[2] H. T. Banks, K. Ito and Y. Wang, *Well Posedness for a class of second-order systems with unbounded input operators*, Center for Research in Secientific Computation, North Californina State Univ.,(1993)

[3] E.H. Brito, *Nonlinear initial boundary value problems*, Nonlinear Anal. T.M.A., Vol. 11, No. 1 ,125-137 (1987)

[4] R. Dautray and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Springer-Verlag, Vol. 5, Evolution Problems, (1992)

[5] J. H. Ha and S. Nakagiri, *Optimal Control Problems for Hyperbolic Distributed Parameter Systems with Damping Terms*, Funkcialaj Ekvacioj to appear.

[6] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-verlag Berlin Heidelberg New York, (1971).

[7] M. Nakao, *Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solutions of the wave equations with nonlinear damping terms*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 58, 336-343, (1977)

[8] K. Nishihara & Y. Yamada, *On global solutions of some degenerate quasilinear hyperbolic equation with dissipative damping terms*, Funkcialaj Ekvacioj, Vol. 33, 151-159, (1990)

[9] J. Y. Park, J. H. Ha and H. K. Han, *Identification problem for damping parameters in linear damped second order systems*, J. Korean Math. Soc. Vol. 34 ,No. 4, 895-909,(1997)

[10] J. Y. Park & J. J. Bae, *On existence of slutions of degenerate wave equations with nonlinear damping terms*, J. Korean Math. Soc. Vol. 35 ,No. 2, 895-909,(1998)

[11] J. Y. Park & J. J. Bae, *On existence of solutions of nondegenerate wave equations with nonlinear damping terms*, Nihonkai Mathematical Journal Vol. 9 ,No. 1, 27-46,(1998)

[12] S. Tanimoto, *Duality in the Optimal Control of Non-Well-Posed Distributed Systems*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 171 , 277-287 (1992)

부산대학교 자연과학대학 수학과