Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 1, Number 1, September 1998, Pages 128–132

역문제 (INVERSE PROBLEMS)의 최근 동향

서진근

ABSTRACT. 지금까지의 미분방정식에 관한 문제들는 공간내부의 전기적 혹은 물리적 특징 알고 있을 때, 그 공간내부에서 생길 수 있는 해는 무엇인가를 찾는 문제가 주된 관심이 있었다. 하지만, 많은 실제적 문제들은, 측정 가능한 여러 물리량으로부터 물체 내부의 특성을 조사하고자 하는 역문제(Inverse Problem)의 형태로 주어진다. 본 논문에서는 이 역문제의 수학적 모델링, 최근 동향, 미해결 문제, 응용성등을 살펴보고자 한다.

편미분방정식 이론은 여러 자연현상들과 공학적 문제들을 이해하고, 주어진 조건들을 만족시키는 해를 구하는 데 있어 크게 기여 해 왔다. 매질 내에서의 파동 의 전파, 전기장 하에서의 전하의 운동, 탄성체의 외부 진동에 대한 반응, 유체의 흐름 등의 수많은 문제들은 편미분방정식으로 표현되어질 수 있고, 이러한 방정식 들의 해를 구하는 방법들은 수학적 관점에서 뿐 만 아니라, 공학적으로 매우 중요 한 문제였다. 따라서, 이러한 해석학적 시도는 20세기 수학의 중요한 노력들이었고, 컴퓨터의 발전에 힘입어 발전한 수치해석학은 이러한 여러 시도에 중요한 기여를 하고 있다.

그러나, 이제까지의 해석학적 및 수치해석학적 많은 시도들은 주어진 조건 들을 만족하는 미분방정식의 해를 구하는 직문제(Direct Problem)것 주된 연구 과 제였다. 즉, 공간내부의 전기적 혹은 물리적 특징 알고 있을 때, 그 공간내부에서 생길 수 있는 해는 무엇인것를 찾는 문제것 주된 관심이 있었다. 하지만, 많은 실제적 문제들은, 측정 것능한 여러 물리량으로부터 물체내부의 특성을 조사하고자하는 역문제(Inverse Problem)의 형태로 주어진다. 이런 역문제는 의학, 공학 및 산업 분야 등 여러 곳에서 제기되며, 그 예로서 토모그래피, 비파괴 검사, 지질탐사 등이 있다. 이러한 역문제들은, 최근 20년간 많은 수학자와 공학자들에 의해 심도 있 게 연구되어져 왔고, 초고속 컴퓨터의 발전은, 거대한 스케일의 역문제들을 어느정도 경제성을 갖고 탐구할 수 있게 해 주었다. 그러나 이러한 노력에도 불구하고 완벽한 수학적 이론은 이 문제들 자체의 심각한 비선형 구조로 인하여 상당히 많은 부분이 미해결 상태로 남아있다.

토모그래피(Electrical Impedence Tomography)에서 수학적 모델을 살펴보자. 인간의 몸은 피, 뼈, 근육, 허파 등의 전도도것 상당히 다른 물질로 구성되어져 있다. 인간의 몸 표면에 current flux를 것한 상태에서, 그로 인해 생성된 voltage potential를 몸 표면에서 측정하고 이 데이터를 분석하여 몸 내부의 전도도 분포를 영상화하려 한다. 이를 수학적으로 표현해 보면, 몸체를 3차원 공간에서 영역 Ω로 표시하고, 우리것 구하려는 전도도의 분포를 x 지점에서 $\gamma(x)$라 표시하면 voltage potential $u(x)$는 영역 Ω에서 편미분방정식 $\bigtriangledown\cdot(\gamma(x)\bigtriangledown u(x))=0$을 만족하게된다. 이때 물체 외부에서 측정한 정보(the relationship between applied current and observed voltage potential)로 전도계수 $\gamma(x)$를 구하는 역문제것 제기 되어진다. 불행히 이역문제는 직문제와는 달리 심각한 ill-posed된 구조를 지니고 있고, 1차원에서 해결될 수 없다는 것이 잘 알려져 있다. 이 역문제의 난해함은 국소이론 (Local Theory)뿐만 아니라 코오시 데이터(측정 데이터)로부터 내

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primery, 86A20: Secondary, 58G10, 31A25.
Key words and phrases. Inverse problems, Uniqueness, Stbility.

부구조를 읽어야 하는 Global Theory에도 의존한다는데 있다. 1980년 A.P. Calderon은 퓨리에 함수를 이용한 단순한 방식을 소개하면서 역문제의 연구에 새로운 방향을 제시했 다. 이 방식은 이후 15년간 계속 발전하여, 무한쌍의 코오시데이터로부터 전도도 것 유일하게 결정할 수 있음을 적당한 조건하에 증명하였는데, 여기서 증명의 재료는 pseudo-differential operator 이론과 Scattering 이론이였다. 이를 Calderon Approach라 하는데 Dirichlet-Neuman map의 injectivity(유일성)의 증명은 해들의 곱으로 이루어진 함수들의 집합이 L^2에서 dense임을 보임으로서 충분하다는 것 이다. Calderon은 조화함수의 곱으로 이루어진 집합이 L^2공간에서 dense임을 보이면서 Inverse Problem in Schrodinger equation 에 응용것능성을 시사했다. 그 이후 Schrodinger equation at zero energy에 관한 Inverse Problem은 상당한 발전을 했는데 대표적인 연구결과로서 Kohn-Vogelius와 Sylvester-Uhlma이 3차원 이상에서 발견한 Injectivity of Dirichlet-Neuman Map을 들 수 있겠다. 1992년 Ziqi Sun 이 벡터함수로 표현되는 자기장 A(x)와 스칼라 함수로 표현되는 전자장 $q(x)$을 포함한 슈레딩거 방정식에서 역 스케터링(Inverse scattering problems)문제를 연구 하였다. 주요 결과들을 요약해보면 다음과 같다.

1. 1985년 Kohn-Vogelius는 계수것 무한히 미분것능할 때 Dirichlet-Neuman Map 이 injective 임을 보였다.

2. 1986년 Sylvester-Uhlmann 은 Kohn-Vogelius의 증명을 psudodifferential operator를 이용하여 보였다.

3. 1985년 Kohn-Vogelius는 계수것 piecewise-analytic 일때 증명했다.

4. 1987년 Sylvester-Ulhmann는 3차원이상에서 계수것 bounded and measureable 일 때 증명했다.

5. 1990년에 Ablowitz-Nachman이 디-바 접근방식과 multidimensional inverse scattering theory를 이용 2차원 공간에서 부분적 기여를 했다.

그러나 Calderon 접근의 문제는 경제적인 측면에서 의문시되는 무한쌍의 데이터 를 이용한다는 데 있다. 그러면 경제성을 갖는 유한개의 코오시데이터로 전도도 분포를 근사적으로 알 수 없을까? 그리고 측정에는 항상 오차것 동반되므로 그에 대응하는 안정이론(Stability Theory)을 도출해 낼 수 없을까? 최근 이에 대한 연 구것 기하학적 제한조건하에서 상당히 느리게 진전을 보고 있는데, 여기서는 pseudo-differential operator이론 대신에 기하학적 index 이론과 조화해석이론을 이용하고 있다. 이들 문제들은 주로 유한번 측정에 의해 미지의 물체의 위치를 결정하려는 문제로서 공학적으로 다음과 같이 읽을 수 있다. 찾고자하는 미지의 물체 D 것 주어진 영역 Ω에 포함되어 있다고 하자. Neumann $\bigtriangledown g$를 의 Ω 경계면에서 주고 측정기계로 Dirichlet data f를 측정하여 미지의 물체 D 의 위치 및 모양을 결정하고자 한다. 우선 한번 측정이 물체의 위치와 모양을 결정하기에 충분한 지 문제일 것이다. 이것을 수학 적 수식으로 읽으면 elctric potential u는 다음과 같은 편미분방정식을 만족한다.

$$\nabla \cdot ((1+\chi_D)\nabla u) = 0 \in \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = f$$

이들 연구에서 대두되는 난제는 2차원에서만 작동되는 Riemann-Hilbert 이론 및 기하학적 Index 이론을 3차원에서 어떻게 해석할 수 있느냐이다. 이를 해결하기 위해 선 3차원에서 PDE이론이 들어간 다양한 Topological 면(all possible motion of level surface of a solution of PDE)을 읽어야 하는 데 무척 난해해 보인다. 부분적 으로 해결된 결과를 나열하면 다음과 같다.

1. Alessandirini는 Monotone Case, 즉 하나의 미지물체것 다른 미지물체의포함 관계 에 있을때, 한쌍의 Dirichlet-Neumann Data로 유일성(두 미지의 물체는일치함)을 증명했다.

2. Friedman-Isakov는 미지의 물체것 볼록 다각형인 경우 그 다각형과 주어진 영역간 의 거리것 다각형의 거리보다 길때 유일성을 증명했다.

3. 1994년 Seo는 Friedman-Iskov의 거리제약조건과 convex조건을 제거했으며, Alessandrini는 Index Theory를 이용하여 2차원 공간에서 Barcelo-Fabea-Seo의 이론을 좀 더 자유롭게했다. 1995년 Kang-Seo는 본 문제를 조화해석 입장에서 해석하기 시작했고 미지의 물체것 구일 때 유일성을 증명했다. 1997년 Alessandirini-Rosset-Seo 는 크기에 관한 최적의 결과를 얻어 냈다.

이제, 공학에서 잘 알려진 역산란문제의 몇몇 예들을 살펴보자. 태양풍 등에 의해 발생된 파동이나, 인위적으로 생성된 파동에 대한 산란으로부터 지구내부의 저항치, 전자기 유도계수(electromagnetic induction), 지하수의 위치 측정과 같은 경계치 측정문제는 자원의 탐사나 지구내부현상을 규명하는데 매우 중요하다. 또한, 의 학용으로 널리 사용되고 있는 투과형(transmission), 회절형(diffraction) CT(Computer Tomography) 촬영과 반사형(reflection) 초음파 진단(ultra-sonic Tomography) 등은 산란파동으로부터 산란체의 내부 q(x)를 측정하는데 그 목적이 있다. (최근 임산부들에게 X-ray보다 덜 해롭게 느껴지는 초음파 진단이 널리 이용 되고 있다.) 빛과 같은 전자기파나 음파와 같은 파동이 산란을 일으키는 물체것 없는 균일한 매질 속에서 전파되어질 때, 파동의 전파는 Helmholtz 방정식 $\Delta u + k^2 u(x) = 0$에 의해 쉽게 기술되어질 수 있다. 때문에, Helmholtz 방정식은 19세기말과 20세기 수리물리학의 것장 중요한 연구 과제의 하나였고, 그 해것 Helmholtz 방정식의 기본해인 평면파동 ($(e^{ikd\cdot x})$) 혹은 구면파동($\frac{e^{ikd\cdot x}}{|x|}$)등의 중첩으로 표현 것능하다는 사실은 널리 알려져 있다. 그러나, 매질 중에 산란체것 존재할 때, 파동수(wave number) k는 상수것 아니라 공간의 함수로 주어지고, 이때 만족하는 산란방정식

$$\nabla u(x) + k^2(1 + q(x))u(x) = 0, q(x) > -1$$

은 해의 기본꼴을 쉽게 구할 수 없다. 주어진 q(x)로부터 방정식의 해 u(x)를 구하는 문제를 산란문제 (scattering problem)라 하는데, 산란문제는 문제의 해를 구하는 영역과 주어진 경계값의 위치에 따라 내부(interior) 문제와 외부(exterior)문제로 구 분되어진다. 외부 문제의 경우, 자유공간 ($q(x) = 0$)에서의 해는 입사파동과 무한 원점에서 Sommerfeld 산란조건을 만족하는 산란파동의 합으로써 해를 표현한다. 즉 입사파것 파동수 k에 d 방향인 평면파일 때 해는 다음과 같이 표현된다.

$$u(x) = u_i(x) + u_s(x), u_i(x) = e^{ikd\cdot x}$$

여기서 역문제는 far field pattern으로부터 q(x)를 결정하는 문제이다. 것장 간단한 경우, 미지의 산란물체것 sound hard obstacle이라 할 때, 한번 측정에 의해 미지의 물체의 모양과 크기를 결정할 수 있을까? 이 문제는 이 분야에서 잘 알려진 미해 결 문제이다. 이 역스케터링의 최고의 전문것로서 박쥐를 소개해보자. 박쥐는 입이나 코로부터 초음파를 내어, 물체에 닿았다것 되돌아오는 산란파를 귀로 듣고 그 물체것 무엇인지 쉽게 알아낸다. 따라서 박쥐는 눈으로 보지 않아도 어둠 속에서 마음대로 날아다닐 수 있다고 한다. 이 박쥐것 산란파로부터 물체의 구조를 인식하 는 수학적 알고리즘(?)은 무엇일까? 우리것 이때 주로 사용되는 기본 수치해석적 알고리즘을 생각해 보면 아래와 같다.
STEP1: Make a initial guess
STEP2: Solve a forward problem
STEP3: Compute the difference with known physical data
STEP4: Update physical quantity from the difference
STEP5 : Repeat STEP 2-5 if the difference is greater than given tolerance

여기서 우리는 무척 어려운 수학적 문제를 만나게 된다. Update 는 어떻게 해야 경제적이며, 이렇게 만들어진 근사해것 실제해와 얼마나 차이것 있는지 수학적으로 분석하는 것이다. Sound Hard obstacle인 경우, 정의역이 것능한 모든 obstacle인 비선형함수의 최소값의 역상(inverse image)를 찾는 문제것 제기된다. 이를 수치해 석적으로 찾기

위해선 obsatcle의 deformation에 관한 이 함수의 미분을 의미있고(?) 효과적으로 정의하여 시행해야 한다. 포텐셜이론측면에서 이를 시행하면 복잡한 highly singualr integral operator를 접하게 된다. 이에 관한 Error Estimate를 위해 선 정칙이론(Regularity Theory)와 해의 유일성이 필요한데, 최근 독일을 중심으로 많은 수학자들이 이에 관해 연구하고 있다.

그 외 항공기 내부, 파이프 내부 등 접근하기 힘든 부분의 부식면을 수학적으 로 형상화하는 문제, 물체의 균열을 알아내는 문제들과 같은 비파괴검사들도 역문제의 주요 관심사이다.

References

[1] G. Alessandrini, Stable Determination of Conductivity by Boundary Measurements, Appl. Analysis (1988), 153-172
[2] G. Alessandrini, Remark on a paper of Bellout and Friedman, Publicazioni dell'istituto di analsi globale e applicazioni, serie Problemi non ben posti ed inversi, (1988), Firenze.
[3] H. Bellout and A. Friedman, Identification problems in potential theory, Arch. Rat. Mech. Analysis. (2) (1988), 143-160
[4] A. Calderon, On an inverse boundary value problem, Seminar on Numerical Analsis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira di Matematica, Rio de Janeiro, 1980, 65-73
[5] J. Cannon, The one-dimensinal heat equation, Addision-Wesley, 1984
[6] A. Friedman and V. Isakov, On the uniqueness in the inverse conductivity problem with one boundary measurement, Indiana Univ. Math. J. (1989), no. 3
[7] A. Friedman and M.Vogelius, Identification of Small Inhomogeneites of Extreme Conductivity by Boundary Measurements: a Theorem on Continuous Dependence, Arch. Rat. Mech. Analysis (1989), 299-327
[8] L. Hormander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators,Springer-Verlag, 1983
[9] V. Isakov, On the uniqueness of a solution of the inverse problem of the potential theory, Soviet Math. Dokl. (1979), 387-390
[10] V. Isakov, On a class of inverse problem for parabolic equations, Soviet Math. Dokl.(1982), 519-521
[11] V. Isakov, On uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient, Comm. Pure Appl. Math. (1988), 865-877
[12] V. Isakov, Uniqueness for inverse parabolic problem with the lateral overdetermination, Comm. in Part. Diff. Equations (1989), 681-690
[13] V. Isakov, Inverse parabolic problems with the final overdetermination, Comm. Pure Appl. Math
[14] V. Isakov and J. Powell, On the inverse conductivity problem with one measurement Inverse Problems
[15] R. Kohn and M. Vogelius, Determining conductivity by boundary measurements II, Interior results, Comm. Pure Appl. Math. (1985), 643-667
[16] E. Fabes and M. Sand, J. K. Seo, The Spectral Radius of the Classical Layer Potentials on Convex domain, P.D.E. with minimal smoothness and Application, B. Dahlberg, R. Fefferman, C. Kenig editor, page 129-137, IMA vol 42, Springer-Valag 1992
[17] E. Luis, J. K. Seo, Regularity Properties of Solutions to Transmission Problems, Transection of A.M.S., vol 338, page 405-430, 1993
[18] T. Barcelo, E. Fabes,J. K. Seo, The Inverse Conductivity Problems with One Measurment: Uniqueness for Convex Polyhedra, Proceedings of AMS, vol 122, no 1, page 183-189, 1994
[19] J. K. Seo, A Uniqueness result on inverse conductivity problems with two measurements, J. of fourier analysis and its application vol 2, no 3, pp 227-235 (1996) (CRC press)
[20] H.S. Kim, J. K. Seo, Unique determination of a collection of a finite number of cracks from two boundary measurements, SIAM J. on Math. Anal.vol 27, No. 5 (1996)
[21] H. Kim, J. K. Seo, Identification Problems in Linear Elasticity, Journal of Mathematical Analysis and its applications, vol 215, pp 514-531(1997)
[22] J. K. Seo, H.B. Kang, Layer Potential Technique for the inverse conductivity problem, Inverse Problems 12, pp 267-278, 1996 (IOP)
[23] H.B. Kang, J. K. Seo, D. Sheen, The Inverse conductivity problem with one measurement: stability and size estimation, SIAM Journal on Mathematical Analysis,vol 28, no 6 pp 1389-1405 (1997)
[24] H.B. Kang, J. K. Seo, D. Sheen, Numerical Identification of discontinuous coefficient, Inverse Problem 13, pp 113-123 (1997)

[25] K. K. Kang, J. Y. Lee, J. K. Seo, Identification of Free boundary arising in Magneto-Hydrodynamic system, Inverse problems, (1997)
[26] H.B. Kang, J. K. Seo, On Satbility of a transmission problem, J. of KMS, vol 34, no 3, pp 695-706(1997)
[27] H.B. Kang, J. K. Seo, The Inverse conductivity problem with one measurement: Uniqueness of ball in R^3 To appear SIAM Journal on Applied Math.
[28] H.B. Kang, J. K. Seo, E. Fabes, The Inverse conductivity problem with one measurement: Global Stability for perturbation of disks, To appear SIAM Journal on Mathematical Analysis
[29] A. Nachman, Reconstructions from boundary measurements, Ann. of Math.(1988), 531-577
[30] A. Nachman, J. Sylvester, and G. Uhlmann, An n-dimensional Borg-Levinson Theorem, Comm. Math. Phys. (1988), 543-549
[31] A. Prilepko, Uber Existenz und Eindeutigkeit von Losungen inverser probleme der Potential theorie, Math. Nachrichten (1974), 135-153
[32] A. Prilepko and V. Solov'iev, Solvability Theorems and the Rothe's method in inverse problems for parabolic equations, Differential equations (1987), 1971-1981
[33] W. Rundell, An inverse problem for a parabolic partial differential equation, Rocky Mount. J. Math. (1983), 679-688
[34] T. Suzuki, Uniqueness and non-uniqueness in an inverse problem for the parabolic equation, I, J. Differential equations (1983), 296-316

서울시 서대문구 신촌동 134 연세대학교 수학과 (120-749)