Trends in Mathematics
Information Center for Mathematical Sciences
Volume 1, Number 1, September 1998, Pages 1–4

일반형 대수다양체에 관한 개략 (SURVEY ON A THREEFOLD OF GENERAL TYPE)

신 동 관

ABSTRACT. 일반형 대수다양체 상에서의 pluricanonical 사상과 지리문제 등을 2차원 대수곡면에서의 경우와 3차원 대수다양체에서의 경우를 서로 비교해 결과들을 대략 살펴본다.

대수기하학의 대상은 대수다양체(algebraic variety)와 이들 사이를 맺어주는 유리사상(rational map)이라 할 수 있다. 따라서 이 대상들을 분류하는 것은 매우 중요한 연구주제 중의 하나이다. 물론 무슨 기준으로 분류를 하느냐가 중요한 관건인데 대수기하학에서는 쌍유리 동치관계(birational equivalence)를 가지고 분류를 한다. 그리고 서로 동치인 많은 대수다양체 중에서 어떤 것을 대표로 할 것인 것도 중요한 문제가 된다. 이 대표를 minimal model이라 한다. (대수기하학의 일반적인 입문서로 잘 알려진 [17], [15], [45] 이외에도 좋은 입문서들이 계속 출간되고 있다.)

대수곡선(algebraic curve)과 대수곡면(algebraic surface)은 잘 분류가 되어 있고 많이 연구되어 있다. 고차원 - 여기서는 3차원 이상을 말한다 - 의 경우에는 어떤 것을 minimal model로 할 것인가는 일찍이 밝혀졌지만 그 존재성에 관해서는 많은 수학자들이 연구하다가 최종적으로 1988년에 S. Mori 에 의해 3차원의 경우에는 존재함이 증명되었고, S. Mori 는 이 업적으로 Field 상을 받았다. 3차원 대수다양체의 minimal model은 대수곡면에서와는 달리 특이점 (singularity)을 가질 수 있는데, minimal model이 가지는 특이점을 terminal singularity라 한다. 앞으로는 minimal model만 생각하자. (대수곡면에 관해서는 [2], [1] 등이 좋은 입문서이고, minimal model program에 관한 좋은 입문서는 [47], [22], [25], [34], [9] 등이 있으나 [47]는 대학원생을 위한 가장 기초적으로 쓰인 survey 논문이고 [25]은 다소 기본지식을 요구한다. 기타 minimal model program에 관련된 논문으로는 [4], [9], [14], [20], [21], [27], [35], [37], [38], [39] 등이고, 특히 [37], [38], [39]등은 minimal model에 관련된 특이점에 관한 내용들을 접할 수 있다.)

n차원 대수다양체(n-fold)들 전체 집합을 Kodaira 차원을 따라 크게 여러 조각으로 나눈 다음, 쪼개진 조각을 쌍유리사상 하에서 불변인 몇 가지 특성을 따라 다시 여러 조각으로 나눈다. Kodaira 차원은 $-\infty$(또는 -1), $\cdots$, n 사이의 값을 가지게 되는데, 그 중에서 Kodaira 차원이 n인 경우를 일반형이라 한다.

대수다양체에서 divisor란 codimension이 1 인 부분대수다양체의 형식적 합을 의미하는데, 일반적으로 divisor로부터 유리사상을 만들어낼 수 있다. Canonical divisor의 양수 배로부터 만들어진 유리사상을 pluricanonical 사상이라 한다. 이 pluricanonical 사상으로부터 일반형 대수다양체에 관한 많은 정보를 얻어낼 수 있다. 일반형 대수다양체는 그것의 canonical divisor가 nef와 big이다 라는 성질로 특징 지울 수 있는데, 이 성질로부터 canonical divisor를 적당히 상수배하면 쌍유리사상을 얻을 수 있고 (birationality) 또 유리사상이 일반함수가 되도록 (base point freeness) 할 수 있다는 것을 알 수 있다. 대수곡면의 경우에는 주어진 임의의 일반형 대수곡면의 canonical divisor를 상수배하면

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14E05, 14J30.
Key words and phrases. variety of general type, pluricanonical system, the geography problem, Miyaoka-Yau inequality, Noether inequality.

언제 쌍유리사상이 되고 언제 일반적인 함수것 되는지 잘 알려져 있고, 이 때의 상수는 주어진 대수곡면에 의존하지 않는 고정된 수임이 알려졌다(universal property). 그러면 이 수의 값은 얼마이고, 이 값 미만의 상수 배에 대해서는 pluricanonical 사상들이 어떻게 되는지를 질문할 수것 있다. 일반형 대수곡면 상에서는 이러한 문제들에 관해 많은 결과들이 연구되어 있다. 또, 이에 따른 많은 방법들도 많이 알려져 있지만 I. Reider에 의해 개발된 벡터 번들 테크닉은 기존의 알려진 결과들을 간단하고 쉽게 유도해낼 수 있게 해주기 때문에 크게 주목을 받았다. 하지만 3차원으로의 확장에는 문제점이 있어 주춤하다것 최근에 와서 이와 유사한 결과들이 발표되고 있다.

그리고 서로 쌍유리 동치관계에 있지 않은 일반형 대수곡면들을 첫 번째 Chern 수(c_1) (first Chern number)와 두 번째 Chern 수(c_2) (second Chern number)의 쌍 (c_1^2, c_2)에 따라 나누는데 이를 지리문제(geography problem)이라 한다. 그러면 주어진 임의의 Chern 수의 쌍에 대해 이를 갖는 일반형 대수곡면이 존재하겠느냐는 문제를 제기할 수 있다. 만약 존재하지 않는 경우것 있다면 Chern 수들 사이의 어떤 관계것 존재해서 이 관계를 만족하는 Chern 수의 쌍에 대해서만 존재성을 보장받는다면 그런 관계는 어떻게 주어지느냐 라는 질문도 던질 수 있다. 또, 존재한다면 구체적으로 그런 대수곡면을 어떻게 건설하겠는것하는 문제도 중요하다. 그리고 지역별로 대수곡면이 갖는 특징들도 관심이 것는 문제이다. 대수곡면인 경우에는 이들 문제에 관해서도 많이 알려져 있다. ([6], [19], [32], [36], [40] 등 많이 있으나 몇 개만 추려보았다.)

일반형 3차원 대수다양체에서도 대수곡면에서 처럼 이와 같은 유사한 결과를 얻고 싶지만 아직은 여러면에서 쉽지것 않다. 대수곡면에서 와는 달리 minimal model이 특이점을 것질 수 있고, I. Reider에 의해 개발된 벡터 번들 테크닉처럼 대수곡면에서만 성립하는 고유의 성질에 의존하는 방법들도 많기 때문이다. 일반형 3차원 대수다양체 상에서 canonical divisor에 의해 생성된 코호몰로지의 차원도 아직 구체적으로 계산하기것 쉽지 않다. 하지만 pluricanonical 사상의 birationality와 base point freeness에 관해서는 대수곡면에서 처럼 교차수(intersection number)를 이용하거나 벡터 번들 테크닉의 3차원으로의 확장이라 볼 수 있는 $\mathbb{Q}-$ divisor 방법(?) 등을 이용하여 좋은 결과들이 계속 발표되고 있다. 특정한 형의 3차원 일반형 대수다양체에 관해서도 좋은 결과 발표되고 있다. 지리문제에 관해서는 대수곡면의 경우에는 Nöther 부등식이나 Miyaoka-Yau의 부등식을 만족시키지 못하는 일반형 대수곡면은 존재하지 않는다. 일반형 3차원 대수다양체에서는 Miyaoka-Yau의 부등식은 성립하나 Nöther 형의 부등식은 아직 밝혀져 있지 못하고, 대수곡면의 경우와는 달리 Nöther 부등식이 크게 영향을 미치지 못한다. 따라서 변형된 형태의 부등식을 필요로 한다. 특이점이 없는 경우에는 확장이 되었으나, 일반적인 경우에는 minimal model 상에서의 특이점의 분포와 관련이 있어서 쉽지것 않다. 또한, 일반형 3차원 대수다양체에서는 세 번째 Chern 수 (c_3)까지 포함된 정보도 일반적으로 알려져 있지 못하다. 그러나 대수곡면에서 성립했던 결과들이 계속해서 확장이 되고 있어 3차원 일반형 대수다양체에서도 좋은 결과들이 계속해서 나오리라 기대하고 있다. (Base point freeness나 $\mathbb{Q}$-divisor 테크닉 등에 관련된 논문들로는 [3], [10], [11], [18], [24], [28] 등이 있고, pluricanonical 사상이나 사상의 birationality에 관한 논문은 [5], [8], [31], [41], [42], [44], [46], [48] 등이 있다. 일반형 3차원 대수다양체의 성질이나 지리문제에 관련된 논문으로는 [7], [12], [13], [19], [23], [26], [29], [33], [43], citeZhang 등을 들 수 있으나, 여기에 나온 것들이 전부것 아니라는 것을 알아 주기 바란다.)

대학원생을 위한 간단한 survey를 부탁 받아 이 글을 쓰게 되었지만 막상 쓰고 나니 부족한 점이 너무 많아 아쉽게 생각합니다. 도움이 될까 하고 참고문헌을 될 수 있는 한 많이 올려 두었습니다. 짧은 준비 시간 때문에 리스트에 미흡한 점이 많습니다. 또, 일반형 3차원 대수다양체에 관련된 문제는 광범위하지만 그 중 몇몇 분야만 소개하는 것을 이해바랍니다. 만약 이와 관련된 의문이나 자료것 필요하시면 아래 주소로 연락을 주십시오.

REFERENCES

[1] Barth, W., Peters, C., Van de Ven, A.: *Compact Complex Surfaces* (Berlin–Heidelberg–New-York: Springer-Verlag 1984)

[2] Beauville, A.: *Complex algebraic surfaces*, LMS Lecture Note Series **68** (Cambridge University Press 1983)

[3] Beltrametti, M. C., Schneider, M. and Sommese, A. J.: 'Applications of the Ein-Lazarsfeld criterion for spannedness of adjoint bundles', *Math. Z.* **214**(1993) 593–599

[4] Benveniste, X.: 'Sur le cone des 1-cycles effectifs en dimension 3', *Math. Ann.* **272**(1985) 257–265

[5] Benveniste, X.: 'Sur les applications pluricanoniques $\cdots$', *Am. J. Math.* **108**(1986) 433–449

[6] Bombieri, E.: 'Canonical models of surfaces of general type', *Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci.* **42** (1973) 171–219

[7] Chang, M-C. : 'On the Chern numbers of surfaces and 3-folds od codimension 2', *Tokyo J. Math.* **19**(1996) no. 2, 369–386

[8] Chen, M. and Chen, Z. J.: 'Irregularity of canonical pencils for a threefold of general type', *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1998) –

[9] Clemens, H, Kollár, J and Mori, S.: *Higher dimensional complex geometry*(Astérisque **166** 1988)

[10] Ein, L.: 'Multiplier Ideals, Vanishin theorem and applications', *Preprint* (1997)

[11] Ein, L. and Lazarsfeld, R.: 'Global generation of pluricanonical and adjoint linear systems on smooth projective threefolds', *J. of AMS* **6**(1993) no. 4, 875–903

[12] Fletcher, A. R.: 'Contributions to Riemann-Roch on projective 3-folds with only canonical singularities ald applications' *Proc. Symp. Pure Math.* **46**(1987) 221–231

[13] Fletcher, A. R.: 'Inverting Reid's exact plurigebera formula', *Math. Ann.* **284**(1989) 617–629

[14] Francia, P.: 'Some remarks on minimal models I', *Comp. Math.* **40**(1980) 301–313

[15] Griffiths, P. and Harris, J.: *Principles of algebraic geometry* (John Wiley & Sons, 1978)

[16] Hanamura, M: 'Pluricanonical maps for minimal 3-folds', *Proc. Japan Acad.* **61, Ser. A**(1985), 116–118

[17] Hartshorne, H.: *Algebraic Geometry* (New-York–Heidelberg: Springer–Verlag 1977)

[18] Helmke, S.: 'On global generation of adjoint linear systems', *preprint* (1997)

[19] Hunt, B.: 'Complex manifold geography in dimension 2 and 3', *J. of Diff. Geometry* **30**(1989) 51–151

[20] Kawamata, Y.: 'The cone of curves of algebraic varieties', *Ann. of Math.* **119**(1984) 603–633

[21] Kawamata, Y.: 'Crepant blowings-up of 3 dimensional canonical singularities and its applications to degenerations of surfaces', *Ann. of Math.* **127**(1988) 93–163

[22] Kawamata, Y.: 'Classification theory of algebraic varieties of higher dimension: toward the theory of minimal models' *Sugaku Expositions* **3**(1990) no. 1. 1–24

[23] Kawamata and Matsuki, K.: 'The number of the minimal models for a 3-fold of general type is finite' *Math. Ann.* **276**(1987) 595–598

[24] Kawachi, T. and Masek, V.: 'Reider-type theorems on normal surfaces', *J. Algebraic Geometry* **7**(1998) 239–249

[25] Kawamata, Y., Matsuda, K and Matsuki, K.: 'Introduction to the minimal model problem', *In: Algebraic Geometry, Sendai 1985 (Oda, T. ed.)*, Adv. Stud. in Pure Math., **vol. 10** (Amsterdam New-York: North–Holland 1987), 283–360

[26] Kobayashi, M.: 'On Noether's inequality for threefolds', *J. Math. Soc. Japan* **44**(1992) no. 1, 145–156

[27] Kollár, J.: 'The cone theorem', *Ann. of Math.* **120**(1984) 1–5

[28] Kollár, J: 'Effective base point freeness', *Math. Ann.* **296**(1993) 595–605

[29] Liu, X. : 'On the geography of threefolds', *Tôhoku Math. J.* **49**(1997) 59–71

[30] Lu, S. S-Y and Miyaoka, Y.: 'Bounding codimension-one subvarieties and a general inequality between Chern numbers', *Am. J. Math.* **119**(1997) 487–502

[31] Matsuki, K.: 'On pluricanonical maps for 3-folds of general type', *J. Math. Soc. Japan* **38**(1986) no. 2, 339–359

[32] Miyaoka, Y.: 'On the Chern numbers of surfaces of general type', *Invent. Math.* **42**(1977) 225–237

[33] Miyaoka, Y.: 'The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety' *In: Algebraic Geometry, Sendai 1985 (Oda, T. ed.)*, Adv. Stud. in Pure Math., **vol. 10** (Amsterdam New-York: North–Holland 1987), 449–476

[34] Mori, S.: 'Classification of higher dimensional varieties' *in: Algebraic Geometry, Bowdoin, 1985. Proc. Symp. Pure Math.* **46**(1987) –

[35] Mori, S.: 'Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds', *J. AMS* **1**(1988) 117–253

[36] Persson, U.: 'An introduction to the geography of surfaces of general type', *Proc. Symp. Pure Math.* **46**(1987) 195–218

[37] Reid, M.: 'Canonical 3-folds', *Géométrie algébrique, Angers 1979 (A. Beauville ed.)* (Sijthoff & Noordhoff, Netherlands, 1980) 273–310

[38] Reid, M.: 'Minimal models of canonical 3-folds', *In: Algebraic varieties and analytic varieties (S. Iitaka ed.)*, Advanced Studies in Pure Math., **vol. 1** (Kinokuniya, Tokyo: North–Holland Amsterdam, 1983) 131–180

[39] Reid, M.: 'Young person's guide to canonical singularities', *in: Algebraic Geometry, Bowdoin, 1985. Proc. Symp. Pure Math.* **46**(1987) 345–414

[40] Reider, I: 'Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces', *Ann. of Math.* **127**(1988) 309–316

[41] Shin, D-K.: 'A linear System on a threefold', *Ark. Mat.* **30**(1992) no. 2, 221–225

[42] Shin, D-K.: On the pluricanonical map of threefolds of general type', *Proc. AMS* **124**(1996) no. 12, 3641–3646

[43] Shin, D-K.: 'Some inequalities between K_X^3 and $\chi(\mathcal{O}_X)$ for a threefold of general type', *Math. Z.* **225**(1997) 133–138

[44] Tsuji, H.: 'On the structure of pluricanonical systems of projective varieties of general type', *preprint* (1997)

[45] Ueno, K.: *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, LNM **439** (Springer, Berlin 1975)

[46] Wilson, P. M. H.:'The pluricanonical maps on varieties of general type', *Bull. London Math. Soc.* **12**(1980) 103–107

[47] Wilson, P. M. H.: 'Towards birational classification of algebraic varieties', *Bull. of London Math. Soc.* **19**(1987) 1–48

[48] Wilson, P. M. H.: 'Base curves of multicanonical systems on threefolds', *Comp. Math.* **52**(1984) 99–113

[49] Zhang, Q: 'Global holomorphic one-forms on pojective manifolds with ample canonical bundles', *J. Algebraic Geometry* **6**(1997) 777–787

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KON-KUK UNIVERSITY, SEOUL, 143-701, KOREA
E-mail address: `dkshin@kkucc.konkuk.ac.kr`